GEOMETRIE

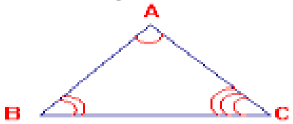
Ce travail sur les triangles avait été réalisé par un groupe de conseillers pédagogiques durant des ateliers organisé par la DEMHGS avec le partenariat de lUSAID est destiné aux professeurs. Nous attendons vos suggestions pour l'améliorer.

Les triangles

A°/ Classe de 6ème

I°/ Généralités :

- Un triangle est **un polygone** qui a trois côtés.
- **Tracer** un triangle ABC.



- **Sommets :** Les points A, B et C sont les sommets du triangle.
- **Côtés :** Les segments [AB], [AC] et [BC] sont les côtés du triangle.
  Selon le contexte, le côté désignera une droite, un segment ou une longueur.
- **Angles :** Les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les angles du triangle.
  Un triangle a trois angles.
- **Côté opposé à un angle :** Côté qui fait face à l'angle (côté dont les extrémités sont les deux autres sommets du triangle). Citer le côté opposé à un angle du triangle : le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$ est [BC].
- **Côtés adjacents à un angle :** Chaque côté d'un angle est un côté adjacent à cet angle.
  Un angle a deux côtés adjacents.
- **Notation :** ABC ; BCA et CAB désigne le même triangle.

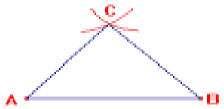
II°/ Construction d'un triangle :

1°/ Connaissant trois côtés

Exemple : Construire un triangle ABC tel que : AB = 3cm ; AC= 5cm et BC = 6cm.

Programme de construction :

- Construire l'un des côtés à l'aide de la règle graduée. Par exemple : AB =3cm.
- Placer la pointe en A et trace un arc de cercle assez grand de 5cm de rayon.
- Placer la pointe en B et trace un arc de cercle de cercle de 6cm de rayon sécant à au premier arc tracé.
- Le point d'intersection de ces deux arcs de cercle est le point C.

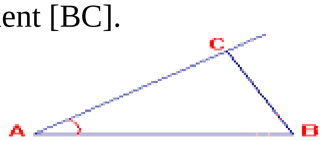


2°/ Connaissant un angle et ses deux côtés

Exemple : Construire le triangle ABC tel que : $\widehat{A}$= 50° ; AB = 5cm et AC = 3cm.

Programme de construction :

- Construire le côté [AB] avec la règle graduée.
- Construire un angle de mesure 50° de sommet A et de côté [AB).
- Sur le 2ème côté de l'angle placer le point C tel que AC = 3cm
- Tracer le segment [BC].



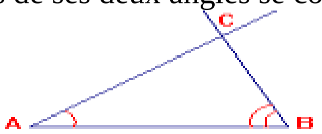
3°/ Connaissant un côté et ses deux angles adjacents

Exemple : Construire un triangle ABC tel que : AB = 5cm, $\widehat{A}$= 30° et $\widehat{B}$= 50°.

Programme de construction :

- Construire le segment [AB] de longueur 5cm.
- Construire l'angle de mesure 30°, de sommet A et de côté [AB).

- Construire l'angle de mesure 50°, de sommet B et de côté [BA].
- Les côtés de ses deux angles se coupent au point C.



III°/ <u>Droites remarquables dans un triangle</u>

1°/ <u>Hauteurs</u>

a) <u>Définition</u> :

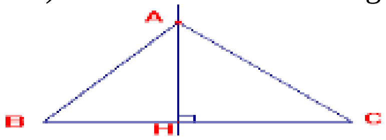
On appelle hauteur d'un triangle la droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

<u>Remarque</u> : Un triangle a trois hauteurs.

b) <u>Construction</u> :

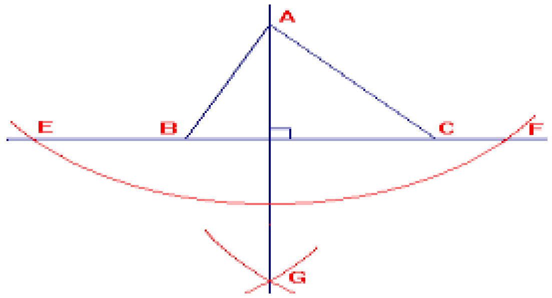
<u>A la règle et à l'équerre</u> :

- Construire un triangle ABC.
- Construire la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).
- Elle coupe (BC) en H.
- La droite (AH) est une hauteur du triangle.



<u>A la règle et au compas</u> :

- Construire un triangle ABC.
- Construire un arc de cercle de centre A coupant (BC) en deux points E et F.
- Construire deux arcs de cercle de même rayon sécants en G, l'un de centre E et l'autre de centre F.
- La droite (AG) est une hauteur du triangle.



2°/ <u>Médianes</u> :

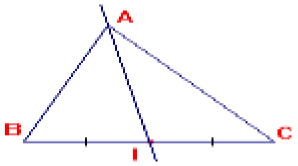
a) <u>Définition</u> :

On appelle médiane d'un triangle la droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

<u>Remarque</u> : Un triangle a trois médianes.

b) <u>Construction</u> :

- Construire un triangle ABC.
- Déterminer le milieu I de [BC].
- Tracer la droite (AI).
- La droite (AI) est une médiane du triangle.



<u>Remarque</u> : On détermine le milieu du côté en utilisant la droite graduée (si possible) ou en utilisant le programme de construction de la médiatrice d'un segment.

3°/ <u>Bissectrices</u> :

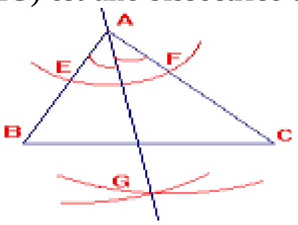
a) <u>Définition</u> :

On appelle bissectrice d'un triangle, la droite qui passe par le sommet d'un angle du triangle et qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Remarque : Un triangle a trois bissectrices.

b) Construction :

- Construire un triangle ABC.
- Construire un arc de cercle de centre A qui coupe [AB) en E et [AC) en F.
- Construire deux arcs de cercle de même rayon sécants en G, l'un de centre E et l'autre centre F.
- La droite (AG) est une bissectrice du triangle.



4°/ Médiatrices :

a) Définition :

On appelle médiatrice d'un triangle la médiatrice d'un côté.

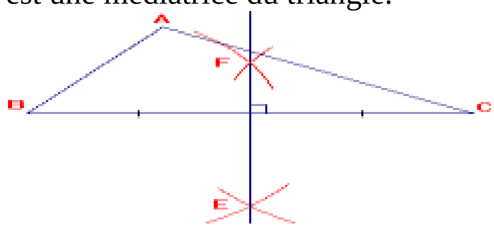
Remarque : Un triangle a trois médiatrices.

b) Construction :

Exemple : Construire un triangle ABC. Construire la médiatrice de [BC].

A la règle et au compas :

- Construire un triangle ABC.
- Du même côté de [BC], construire deux arcs de cercle de même rayon sécants en E, l'un de centre B et l'autre de centre C.
- De l'autre côté de [BC], refaire la même construction. Les arcs de cercle se coupent en F.
- La droite (EF) est une médiatrice du triangle.



A la règle et à l'équerre :

- Si la règle graduée permet de déterminer avec précision le milieu de [BC] alors on trace la droite passant par ce milieu et perpendiculaire à [BC].
  Cette droite est une médiatrice du triangle.

IV°/ Triangles particuliers

1) Triangle rectangle

a) Définition

Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit (deux côtés perpendiculaires).

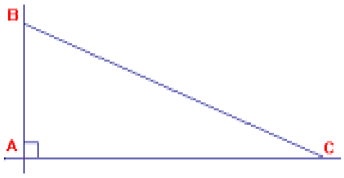
- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**.
- L'hypoténuse est le côté du triangle qui a la plus grande longueur.
- ABC est un triangle rectangle en A donc : (AB) $\perp$ (AC) ; l'hypoténuse est le côté [BC].
- Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

b) Construction

Exemple : Construire un triangle ABC rectangle en A.

Programme de construction :

- Tracer deux droites perpendiculaires en A.
- Marquer un point B sur l'une des droites et un point C sur l'autre.
- Tracer le segment [BC].



2) Triangle isocèle

a) Définition

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

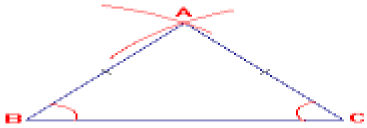
- Le point de rencontre des côtés de même longueur est appelé **sommet du triangle isocèle** et le côté opposé à ce sommet est appelé **base**.
- ABC est un triangle isocèle de sommet A donc : AB = AC.
- Les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.

b) Construction

Exemple : Construire un triangle ABC isocèle de sommet A.

Programme de construction :

- Trace un segment [BC].
- Construire deux arcs de cercle sécants de même rayon l'un de centre B et l'autre de centre C.
- Le point d'intersection des arcs est le sommet A du triangle.



3°) Triangle équilatéral

a) Définition

Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.

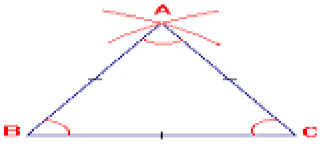
- Les angles d'un triangle équilatéral ont la même mesure 60°.

b) Construction :

Exemple : Construire un triangle ABC équilatéral.

Programme de construction :

- Trace un côté du triangle. Par exemple **:** [BC].
- Construire deux arcs de cercle sécants de même rayon BC, l'un de centre B et l'autre de centre C.
- Le point d'intersection des arcs est le sommet A du triangle.



4°) Triangle rectangle isocèle

a) Définition :

Un triangle rectangle isocèle est un triangle qui a un angle droit et deux côtés de même longueur.

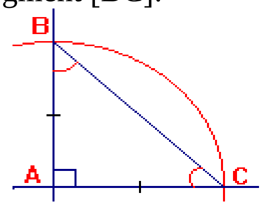
- ABC est un triangle rectangle isocèle en A donc : (AB) ⊥ (AC) et AB = AC.
- Les angles à la base d'un triangle rectangle isocèle ont la même mesure 45°.

b) Construction :

Exemple : Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A.

Programme de construction :

- Tracer deux droites perpendiculaires en A.
- Construire un arc de cercle de centre A qui coupe l'une des droites en B et l'autre en C.
- Trace le segment [BC].

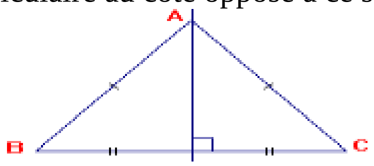


Remarque : Un triangle scalène est un triangle a ses côté quelconques.

V°/ Axes de symétrie

1°/ Axe de symétrie du triangle isocèle

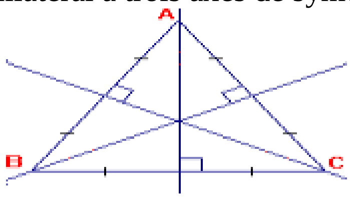
Un triangle isocèle admet un seul axe de symétrie qui est la droite passant par le sommet du triangle isocèle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



2°/ Axes de symétrie du triangle équilatéral

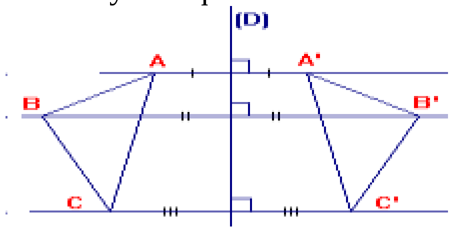
Toute droite passant par un sommet du triangle équilatéral et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet est un axe de symétrie du triangle.

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie.



VI°/ Symétrique d'un triangle par rapport à une droite

Le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (D) est le triangle A'B'C' dont les sommets sont les symétriques des sommets du triangle ABC.



VII°/ Aire d'un triangle

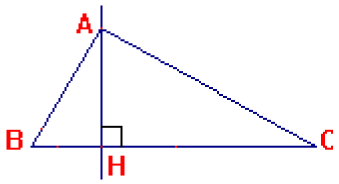
a) Aire d'un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle rectangle. $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times AC}{2}$

b) Aire d'un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque. (AH) est la hauteur issue de A. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle.



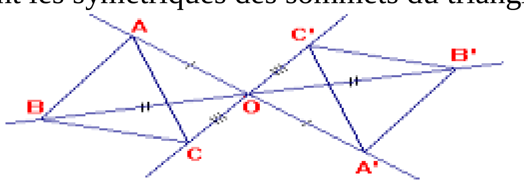
$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{Base \times hauteur}{2}$$

Remarque : A chaque base qui est un côté du triangle, il y a une hauteur correspondante issue du sommet opposé à cette base.

B°/ Classe de 5ème

I°/ Symétrique d'un triangle par rapport à un point

Le symétrique du triangle ABC par rapport au un point O est le triangle A'B'C' dont les sommets sont les symétriques des sommets du triangle ABC.



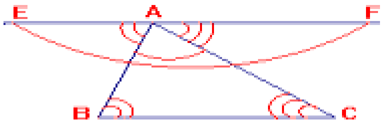
II°/ Somme des angles d'un triangle

1°/ <u>Propriété</u>

La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

2°/ <u>Justification</u>

Soit ABC un triangle. Trace la droite (EF) passant par A et parallèle à (BC) telle que A $\in$[EF].



- Les angles alternes internes $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABC}$ formés par deux droites parallèles coupées par une sécante ont la même mesure : $\widehat{EAB} = \widehat{ABC}$.
- Les angles alternes internes $\widehat{FAC}$ et $\widehat{ACB}$ formés par deux droites parallèles coupées par une sécante ont la même mesure : $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$.
- $\widehat{EAF} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{FAC} = 180°$ or $\widehat{EAB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$ donc :

$\widehat{EAF} = \widehat{ABC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$

La somme des angles d'un triangle vaut donc 180°.

III°/ <u>Droites remarquables</u>

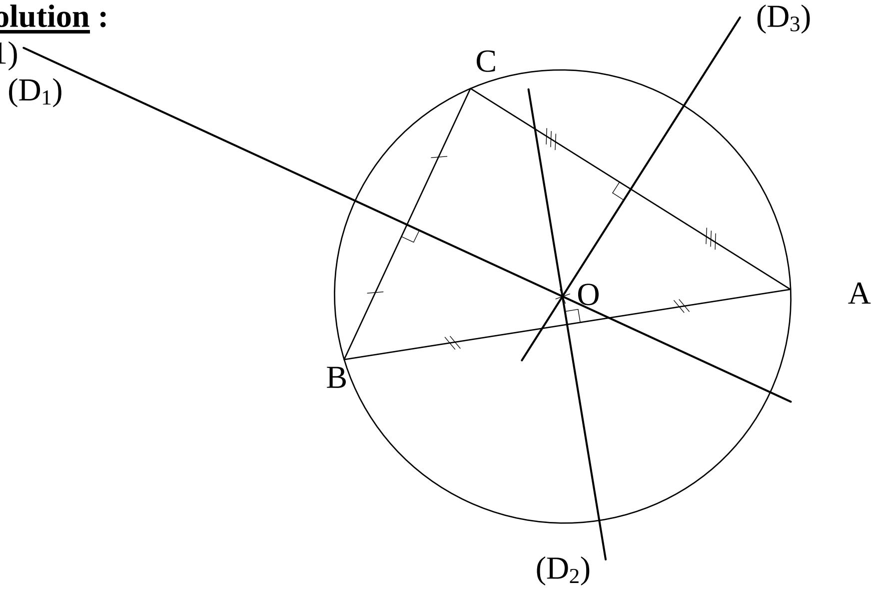
1°/ <u>Médiatrices d'un triangle</u>

<u>Activité</u> :

1) Trace un triangle ABC.
   Construis les médiatrices (D_1) de [BC], (D_2) de [AB] et (D_3) de [AC].
2) Démontre que les médiatrices (D_1) et (D_2) sont sécantes.
3) Soit O le point d'intersection des médiatrices (D_1) et (D_2).
   a) Justifie que OB = OC.
   b) Justifie que OB = OA.
   c) Déduire des questions a) et b) que : OA = OB = OC.
   d) Déduis-en que :
      - le point O appartient à la médiatrice (D_3) de [AC].
      - le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

<u>Solution</u> :

1)



2) Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires à deux droites sécantes (BC) et (BA) donc elles sont sécantes.

3) a) O est un point de (D_1) médiatrice de [BC] donc : OB = OC.
   b) O est un point de (D_2) médiatrice de [AB] donc : OB = OA.
   c) OB = OC et OB = OA donc : OA = OB = OC.
   d) OA = OC donc O est un point de (D_3) médiatrice de [AC].

O est un point de (D_1) médiatrice de [BC], O est un point de (D_2) médiatrice de [AB] et O est un point de (D_3) médiatrice de [AC] donc les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes.

OA = OB = OC donc les sommets A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

Propriétés :

a) Dans un triangle les trois médiatrices sont concourantes.

b) Cercle circonscrit au triangle

Le point de concours des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.

2°/ Hauteurs d'un triangle

Activité :

1) Trace un triangle ABC et les trois hauteurs.
Nomme les points A', B' et C' pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C.
Trace (L_1) la parallèle à (BC) passant par A.
Trace (L_2) la parallèle à (AC) passant par B, elle coupe (L_1) en I.
Trace (L_3) la parallèle à (AB) passant par C, elle coupe (L_2) en K et (L_1) en J.

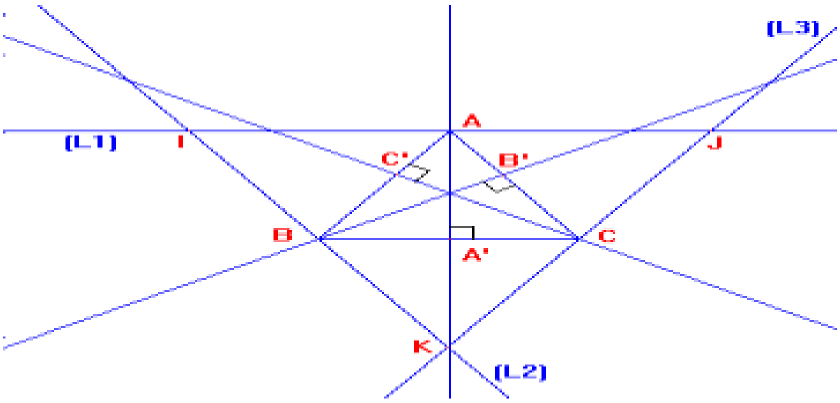
2) Démontre que les quadrilatères IACB, AJCB et ABKC sont des parallélogrammes.

3) Démontre que A, B et C sont les milieux respectifs de [IJ], [IK] et [JK].

4) Démontre que (AA'), (BB') et (CC') sont les médiatrices des côtés du triangle IJK.
En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Solution :

1)



2) - (IA) // (BC) et (IB) // (AC) donc IACB est un parallélogramme.
- (AJ) // (BC) et (AB) // (JC) donc AJCB est un parallélogramme.
- (AB) // (CK) et (AC) // (BK) donc ABKC est un parallélogramme.

3) IACB est un parallélogramme donc IA = BC et IB = AC.
AJCB est un parallélogramme donc JC = AB et AJ = BC.
ABKC est un parallélogramme donc AC = BK et CK = AB.
IA = BC et AJ = BC donc IA = AJ.
I, A et J sont alignés et IA = AJ donc A est le milieu de [IJ].
IB = AC et AC = BK donc IB = BK.
I, B et K sont alignés et IB = BK donc B est le milieu de [IK].
JC = AB et CK = AB donc JC = CK.
J, C et K sont alignés et JC = CK donc C est le milieu de [JK].

4) - (BC) // (IJ) et (AA') $\perp$ (BC) donc : (AA') $\perp$ (IJ).
A est le milieu de [IJ] et (AA') $\perp$ (IJ) donc (AA') est la médiatrice de [IJ].
- (AC) // (IK) et (BB') $\perp$ (AC) donc (BB') $\perp$ (IK).
B est le milieu de [IK] et (BB') $\perp$ (IK) donc (BB') est la médiatrice de [IK].
- (AB) // (JK) et (CC') $\perp$ (AB) donc (CC') $\perp$ (JK).
C est le milieu de [JK] et (CC') $\perp$ (JK) donc (CC') est la médiatrice de [JK].
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les médiatrices du triangle IJK donc elles sont concourantes.
Les médiatrices du triangle IJK sont les hauteurs du triangle ABC donc les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

- **Propriétés :**
  Dans un triangle les trois hauteurs sont concourantes.
- **Orthocentre d'un triangle**
  Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre du triangle.
- **Remarques sur la position de l'orthocentre** (Construction pour chaque cas)

Soit ABC un triangle et H l'orthocentre de ce triangle.

a) Si les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus, alors H l'orthocentre est un point intérieur au triangle ABC.

b) Si un angle est obtus, alors H est à l'extérieur du triangle.

c) Si le triangle est rectangle, alors H est confondu avec le sommet de l'angle droit.

IV°/ Triangle rectangle

1°/ Propriétés

- Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
- Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets du triangle.

2°/ Reconnaissances

- Si un triangle a deux angles complémentaires, alors c'est un triangle rectangle.
- Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un de ses diamètres ne contenant pas ce point, alors on obtient un triangle rectangle.
- Si dans un triangle, le milieu d'un côté est à égale distance des trois sommets alors ce triangle est rectangle.

V°/ Triangle isocèle

1°/ Propriétés

- Un triangle isocèle a un axe de symétrie et deux angles à la base de même mesure.

2°/ Reconnaissances

- Un triangle qui a un axe de symétrie est un triangle isocèle.
- Un triangle qui a deux angles de même mesure est un triangle isocèle.

VI°/ Triangle équilatéral

1°/ Propriétés

- Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie donc trois angles de même mesure.

2°/ Reconnaissances

- Un triangle qui a deux axes de symétrie est un équilatéral.

C°/ Classe de 4ème

I°/ Critère d'existence d'un triangle à partir de trois nombres donnés

1°/ Propriété

Dans un triangle, un côté est inférieur à la somme des autres et est supérieur à leur différence.

2°/ Construction d'un triangle

On considère trois nombres a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle.

- Si un des nombres est compris entre la différence et la somme des deux autres, alors on peut construire un triangle.
  Inversement
- Si on peut construire un triangle alors chacun des nombres a, b et c est compris entre la différence et la somme des deux autres.

II°/ Droites des milieux

1°/ Théorème 1 et 2

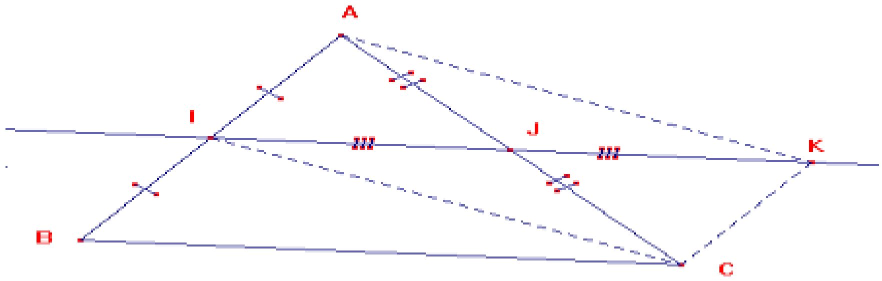
1) Activité 1 (Pré-requis : Symétrie centrale-Parallélogramme)

ABC est un triangle. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].

a) Construis le point K, symétrique de I par rapport à J.
b) Démontre que le quadrilatère AICK est un parallélogramme.
c) Déduis de la question b) que : (AI) // (KC) et AI = KC.
d) Justifie que : (IB) // (KC) et IB = KC.
e) Déduis de la question d) que le quadrilatère IBCK est un parallélogramme.
f) Justifie que : (IJ) // (BC) et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Solution :

a) Figure



b) Puisque le point K est le symétrique de I par rapport à J donc :

J est le milieu de [IK].

Dans le quadrilatère AICK, J est le milieu de la diagonale [AC] et de la diagonale [IK] donc le quadrilatère AICK est un parallélogramme.

c) Puisque le quadrilatère AICK est un parallélogramme donc :

(AI) // (KC) et AI = KC.

d) Puisque (AI) // (KC) et B ∈ (AI) donc : (IB) // (KC)

Puisque I est le milieu de [AB] donc : AI = IB.

Puisque AI = IB et AI = KC donc : IB = KC.

e) Puisque (IB) // (KC) et IB = KC donc le quadrilatère IBCK est un parallélogramme.

f) Puisque le quadrilatère IBCK est un parallélogramme donc : (IK) // (BC) et IK = BC.

(IK) // (BC) et J ∈ (IK) donc : $\boxed{\textbf{(IJ) // (BC)}}$

Puisque IK = BC et J est le milieu de [IK] donc : $IJ = \frac{IK}{2} = \frac{BC}{2}$

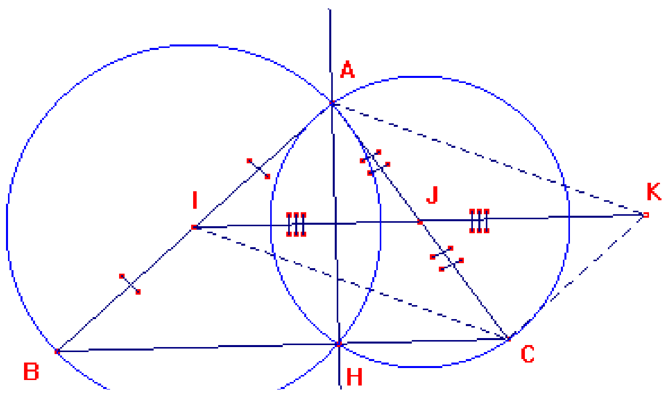
$$\boxed{IJ = \frac{BC}{2}}$$

2) <u>Activité 2</u> *(Pré- requis : Le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit-Propriétés de la médiatrice).*

ABC est un triangle. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC] et le point H est le pied de la hauteur issue de A.

1) a) *Quelle est la nature des triangles ABH et AHC ?*
   b) *Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABH ?*
   c) *Compare les distances IA et IH.*
   d) *Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC ?*
   e) *Compare les distances JA et JH.*
2) a) *Démontre que (IJ) est la médiatrice de [AH]. En déduire que (IJ) // (BC).*
3) a) *Construis le point K, symétrique de I par rapport à J.*
   b) *Démontre que le quadrilatère AICK est un parallélogramme. En déduire que (AI) // (KC).*
   c) *Justifie que : (IB) // (KC).*
   d) *Démontre que le quadrilatère IBCK est un parallélogramme.*
   e) *Montre que :* $IJ = \frac{BC}{2}$

<u>Solution</u> *:*



1) *a) Puisque ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de A donc (BC) $\perp$ (AH).*
Comme H $\in$ (BC), donc ABH et AHC sont des triangles rectangles en H.
b) Le centre du cercle circonscrit au triangle ABH rectangle en H est le point I milieu de l'hypoténuse [AB].
c) Les points A et H appartenant à un même cercle de centre I donc : IA =IH.
d) Le centre du cercle circonscrit au triangle AHC rectangle en H est le point J milieu de l'hypoténuse [AC].
e) Les points A et H appartenant à un même cercle de centre J donc JA= JH.

2) *IA =IH donc I appartient à la médiatrice de [AH] et JA = JH donc J appartient à la médiatrice de [AH].*
Puisque I et J appartiennent à la médiatrice de [AH] donc (IJ) est la médiatrice de [AH].
Puisque (IJ) est la médiatrice de [AH] donc (IJ) $\perp$ (AH).
(IJ) $\perp$ (AH) et (BC) $\perp$ (AH) donc : $\boxed{\textbf{(IJ) // (BC)}}$

3) *b) K est le symétrique de I par rapport à J donc J est le milieu de [IK].*
J est le milieu de [IK] et J est le milieu de [AC] donc le quadrilatère AICK est un parallélogramme.
Puisque le quadrilatère AICK est un parallélogramme donc : (AI) // (KC).
c) (AI) // (KC) et B $\in$ (AI) donc : (IB) // (KC).
d) On sait que (IJ) // (BC) et K $\in$ (IJ) donc : (IK) // (BC).
(IK) // (BC) et (IB) // (KC) donc le quadrilatère IBCK est un parallélogramme.
e) Puisque le quadrilatère IBCK est un parallélogramme donc : IK = BC.
J est le milieu de [IK] donc : $IJ = \frac{IK}{2}$

$IJ = \frac{IK}{2}$ *et IK = BC donc* $\boxed{\mathbf{IJ = \frac{BC}{2}}}$

3) <u>Théorème 1</u> :

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

<u>Déductogramme</u> :

ABC est un triangle

I milieu de [AB] | *J milieu de {AC]*

(IJ) // (BC)

4) <u>Théorème 2</u> :

Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté.

<u>Déductogramme</u> :

ABC est un triangle

I milieu de [AB] | *J milieu de [AC]*

$\mathbf{IJ = \frac{BC}{2}}$

II / **Théorème 3** :

1) Activité 3 (Pré-requis : Symétrie centrale-Parallélogramme).

ABC est un triangle. Le point I est le milieu du côté [AB].
Soit (D) la parallèle à (BC) passant par I, elle coupe [AC] en un point J.

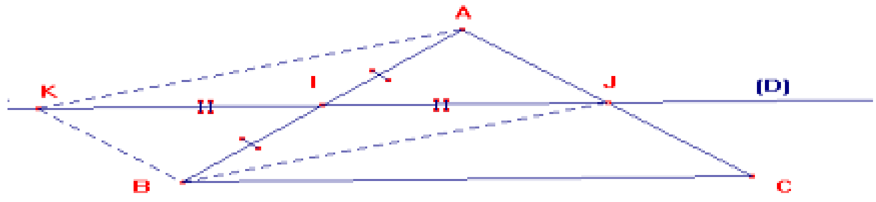
1) a) Construis le point K, symétrique de J par rapport à I.
b) Démontre que le quadrilatère AKBJ est un parallélogramme.
c) Déduis de la question b) que la droite (KB) est parallèle à la droite (AJ) et la distance KB est égale à la distance AJ.
d) Justifie que : (KB) // (JC).

2) a) Démontre que le quadrilatère KBCJ est un parallélogramme
b) Déduis-en que : KB = JC.

3) Justifie que J est le milieu de [AC].

Solution :

1) a)



b) Le point K est le symétrique de J par rapport à I donc I est le milieu de [JK].
Dans le quadrilatère AKBJ puisque I est le milieu des diagonales [JK] et [AB] donc le quadrilatère AKBJ est un parallélogramme.

c) Le quadrilatère AKBJ est un parallélogramme donc les côtés opposés sont parallèles et de même longueur : (KB) // (AJ) et KB = AJ.

d) J $\in$ (AC) donc les droites (AJ) et (JC) sont confondues. Puisque (KB) // (AJ) et que (AJ) et (JC) sont confondues donc (KB) // (JC).

2) a) On sait que (KB) // (JC) et (KJ) // (BC). Le quadrilatère KBCJ, ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme.
b) Le quadrilatère KBCJ est un parallélogramme donc ses côtés opposés ont même longueur : KB = JC.

3) Puisque KB = AJ et KB = JC donc : AJ = JC.

Puisque J $\in$ [AC] et AJ = JC donc : $\boxed{\textbf{J est le milieu de [AC]}}$

2) Théorème :

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

Déductogramme : *ABC est un triangle*

I milieu de [AB] — *I $\in$ (D)* — *(D) // (BC)*

(D) passe par J milieu de [AC]

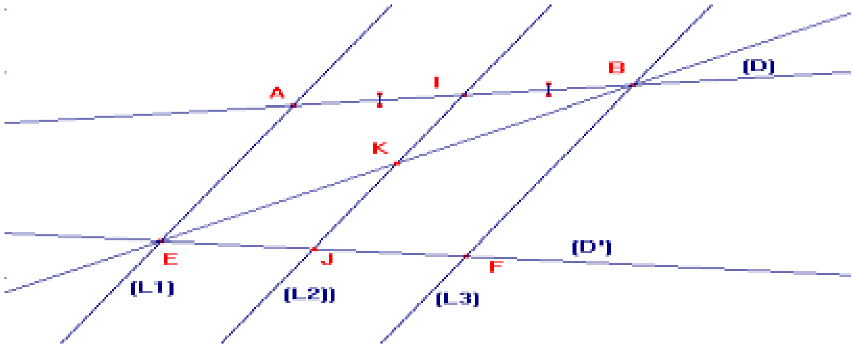
II / **Théorème 4** :

1) Activité 4 (Pré-requis : Théorème 3)

Sur une droite (D) place trois points A, I et B distincts tels que I soit le milieu de [AB]. Trace trois droites parallèles (L_1), (L_2) et (L_3) passant respectivement par A, I et B. Trace une autre droite (D') qui coupe (L_1), (L_2) et (L_3) respectivement
Aux points E, J et F.
Trace la droite (EB). Elle coupe (IJ) en K.

a) Démontre que K est le milieu de [BE]. (Utilise le théorème 3)
b) Démontre que J est le milieu de [EF]. (Utilise le théorème 3)

Solution :



a) Dans le triangle ABE, I est le milieu de [AB] et la parallèle à (AE) passant par I coupe [BE] en K, donc d'après le théorème 3 de la droite des milieux K est le milieu de [BE].

b) Dans le triangle BEF, K est le milieu de [EB] et la parallèle à (BF) passant par K coupe [EF] en J, donc d'après le théorème 3 de la droite des milieux J est le milieu de [EF].

Théorème : *(Parallèles équidistantes)*

Si trois droites parallèles découpent sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur, alors elles découpent sur toute autre sécante deux segments consécutifs de même longueur.

III°/ Droites remarquables dans un triangle

1°/ Bissectrices d'un triangle

Activité

1) Trace un triangle ABC. Construis les bissectrices des angles de ce triangle.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en A', la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe [AC] en B' et la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe [AB] en C'.

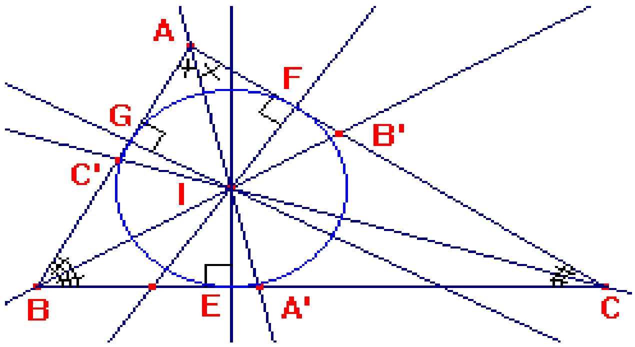
2) Démontre que les bissectrices (AA') et (BB') sont sécantes.

3) Soit I le point d'intersections des bissectrices (AA') et (BB').
Soient :
_ (D_1) la droite passant par I et perpendiculaire à (BC) en E.
_ (D_2) la droite passant par I et perpendiculaire à (AC) en F.
_ (D_3) la droite passant par I et perpendiculaire à (AB) en G.
a) Montre que le point I est équidistant des trois côtés du triangle ABC.
b) Déduis de la question a) que le point I est un point de la bissectrice (CC') de l'angle $\widehat{ACB}$.Que représente le point I pour les trois bissectrices ?

4) Trace le cercle (**C** de centre I et de rayon IE. Démontre que (**C**) est tangent aux droites (BC), (AC) et (AB) respectivement en E, F et G.

Solution

1)



2) La bissectrice (AA') partage le plan en deux demi-plans, l'un contenant le point B et l'autre le point B'.
La bissectrice (BB') qui passe par deux points appartenant à deux demi-plans différents coupe la frontière (AA') en un point donc (AA') et (BB') sont sécantes.

3) a) Le point I appartient à la bissectrice (AA') de l'angle $\widehat{BAC}$ donc I est équidistant des côtés de l'angle : (IG) $\perp$(AB), G $\in$ (AB) et (I F) $\perp$(AC), F $\in$ (AC) donc IG = IF.

Le point I appartient à la bissectrice (BB') de l'angle $\widehat{ABC}$, (IG) $\perp$ (AB), G $\in$ (AB) et (IE) $\perp$ (BC) , E $\in$ (BC) donc IG = IE.

IG = IF et IG = IE donc IG = IF = IE

IE = IF, E $\in$ (BC) et F $\in$(AC) donc I appartint à la bissectrice (CC') de l'angle $\widehat{ACB}$.

b) I $\in$ (AA'), I $\in$ (BB') et I $\in$ (CC') donc les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

4) IG = IF = IE donc les points E, F et G appartiennent à un même cercle (**C**) de centre I.

[IG] est un rayon du cercle (**C**), (AB) est perpendiculaire à (IG) en G donc le cercle (**C**) est tangent à la droite (AB) en G.

[IE] est un rayon du cercle (**C**), (BC) est perpendiculaire à (IE) en E donc le cercle (**C**) est tangent à la droite (BC) en E.

[IF] est un rayon du cercle (**C**), (AC) est perpendiculaire à (IF) en F donc le cercle (**C**) est tangent à la droite (AC) en F

Propriété :

- Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
- *Cercle inscrit dans un triangle :*

C'est un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Son centre est le point de concours des bissectrices.

2°/ Médianes d'un triangle

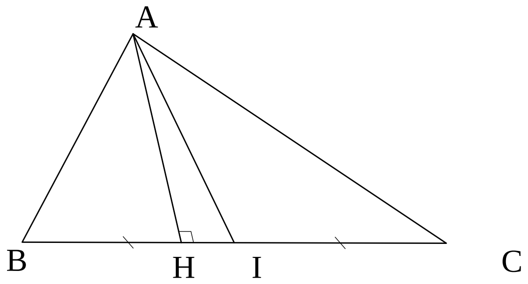
a) Propriété 1

Activité :

1) Trace un triangle ABC et la hauteur issue de A. H est le pied de la hauteur. Marque le point I milieu de [BC] et trace la médiane (AI).
2) Exprime les aires des triangles ABI et ACI en fonction de la hauteur AH.
3) Compare les aires des deux triangles.

Solution :

1)



2) Soit $\mathcal{A}_{ABI}$ l'aire du triangle ABI et $\mathcal{A}_{ACI}$ l'aire du triangle ACI.

$\mathcal{A}_{ABI} = \dfrac{BI \times AH}{2}$ et $\mathcal{A}_{ACI} = \dfrac{CI \times AH}{2}$

3) I est le milieu de [BC] donc BI = CI.

$\mathcal{A}_{ABI} = \dfrac{BI \times AH}{2}$, $\mathcal{A}_{ACI} = \dfrac{CI \times AH}{2}$ et BI = CI donc : $\boxed{\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{ACI}}$

Propriété :

La médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire.

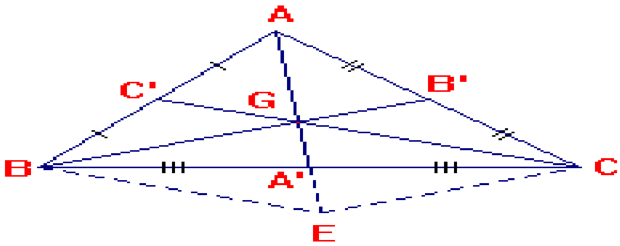
b) Propriété 2 :

Activité

Trace un triangle ABC. Marque les points A', B' et C' milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. Trace les médianes (AA'), (BB') et (CC') de ce triangle.

1) Démontre que les médianes (BB') et (CC') sont sécantes.
2) Soit G le point d'intersection des médianes (BB') et (CC').
   a) Construis le point E, symétrique de A par rapport à G. Que représente le point G pour le segment [AE].
   b) n utilisant le triangle ABE, démontre que (BE) et (GC) sont parallèles.
   c) En utilisant le triangle ACE, démontre que (CE) et (GB) sont parallèles.
   d) Montre que le quadrilatère CGBE est un parallélogramme.
   e) Montre que (AG) passe par le milieu A' du côté [BC].
3) Démontre que AG = $\dfrac{2}{3}$ AA'.

Solution :



1) La médiane (BB') partage le plan en deux demi-plans l'un contenant le point C et l'autre le point C'. La médiane (CC') qui passe par deux points appartenant à deux demi-plans différents coupe la frontière (BB') en un point donc (BB') et (CC') sont sécantes.
2) b) Le symétrique de A par rapport à G est E donc G est le milieu de [AE].
   Dans le triangle ABE, C'est le milieu de [AB] et G est le milieu de [AE] donc (C'G) // (BE).
   (C'G) // (BE) or C est un point de la droite (C'G) donc (BE) // (GC)
   c) Dans le triangle ACE, B' est le milieu de [AC] et G est le milieu de [AE] donc (B'G) // (CE).
   (B'G) // (CE) or B est un point de la droite (B'G) donc (CE) // (GB).
   d) (BE) // (GC) et (CE) // (GB) donc CGBE est un parallélogramme.
   e) CGBE parallélogramme donc les diagonales [CB] et [GE] ont même milieu A'.
   A' milieu de [GE] et G milieu de [AE] donc A' $\in$ (AG).
   La médiane (AA') passe par le point G donc les médianes du triangle sont concourantes.
3) G milieu de [AE] donc AG = GE.
   A' milieu de [GE] donc GA' = A'E

   $GA' = \frac{1}{2} GE$ $\quad$ $GA' = \frac{1}{2} AG$ $\quad$ $AG = 2\, GA'$

   $AA' = AG + GA'$ $\quad$ $AA' = AG + \frac{1}{2} AG$ $\quad$ $AA' = \frac{3\, AG}{2}$ $\quad$ $\boxed{AG = \frac{2}{3} AA'}$

   On démontre de même que : $BG = \frac{2}{3} BB'$ et $CG = \frac{2}{3} CC'$.

Propriété :
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Centre de gravité d'un triangle :
Le point de concours des médianes d'un triangle est appelé centre de gravité du triangle.
Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

3°/ Reconnaissances d'un triangle isocèle

Activité

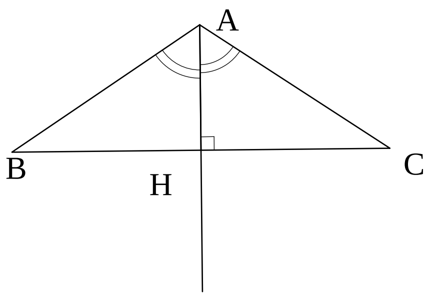


figure 1

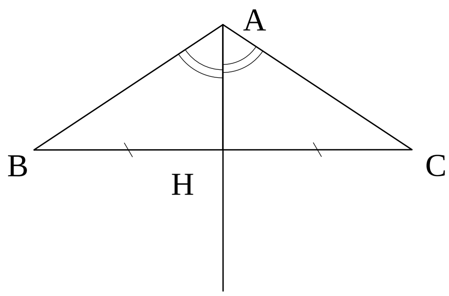


figure 2

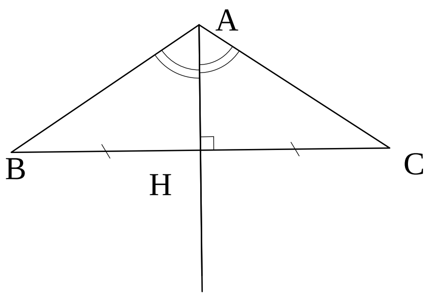


figure 3

Dans chacun des triangles codés ABC démontre que le triangle est isocèle en A.

Solution

Considérons la figure 1.
_ (AH) étant la hauteur issue de A du triangle ABC donc les triangles AHB et AHC sont rectangles en H.

AHB étant un triangle rectangle en H donc $\widehat{HBA} + \widehat{BAH} = 90°$ (1)

AHC étant un triangle rectangle en H donc $\widehat{HCA} + \widehat{CAH} = 90°$ (2)

_ (AH) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

D'après les égalités (1) et (2) on a $\widehat{HBA} + \widehat{BAH} = \widehat{HCA} + \widehat{CAH}$.

Or $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ donc $\widehat{HBA} + \widehat{BAH} = \widehat{HCA} + \widehat{BAH}$ d'où $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$.

$\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$ donc le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

Considérons la figure 2.

_ (AH) étant une médiane du triangle ABC donc les triangles AHB et AHC ont la même aire.

_ I et J étant respectivement les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC) et H un point de la médiatrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc HI = HJ.

_ Soit $\mathcal{A}_{ABH}$ l'aire du triangle ABH et $\mathcal{A}_{ACH}$ l'aire du triangle ACH.

$$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{AB \text{ x } HI}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{ACH} = \frac{AC \text{ x } HJ}{2}$$

Or nous avons $\mathcal{A}$ABH = $\mathcal{A}$ACH et HI = HJ donc AB = AC.

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

Considérons la figure 3.

La bissectrice (AH) est en même temps la médiatrice du segment [BC] donc AB = AC.

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

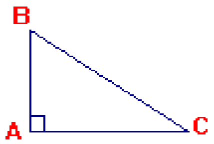
IV°/ <u>Triangle rectangle</u>

1°/ <u>Propriétés</u>

a) **<u>Activité</u> :** Projection de CABRI-GEOMETRE (figure- collège- Pythagore) : Aires de carrés construits sur les différents côtés d'un triangle rectangle.

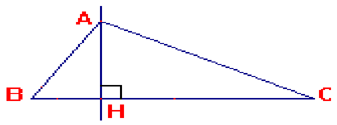
b) **<u>Théorème de Pythagore</u>**

Si un triangle ABC est rectangle en A alors $\boxed{\mathbf{BA^2 + AC^2 = BC^2}}$



c) Si un triangle ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A alors

$\boxed{\mathbf{AB \times AC = AH \times BC}}$



<u>Justification</u> :

Calculer de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \frac{AH \times Bc}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times Bc}{2}$$

$\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{AH \times BC}{2}$ donc AB × AC = AH × BC.

2°/ <u>Reconnaissances</u>

a) Soit un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A.

Si AB × AC = AH × BC, alors le triangle ABC est rectangle en A.

b) **<u>Réciproque du Théorème de Pythagore</u> :**

Si BA² + AC² = BC², alors le triangle ABC est rectangle en A.

V°/ <u>Polygone régulier</u>

Un triangle équilatéral est un polygone régulier car il a tous ses côtés et tous ses angles égaux.

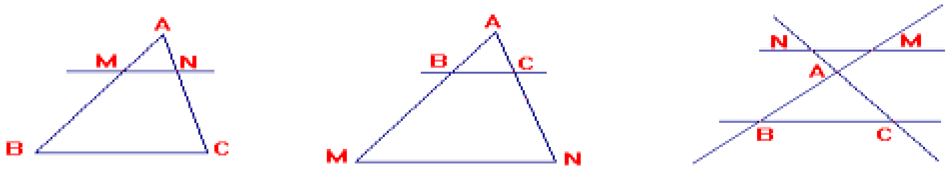
D°/ <u>Classe de 3ème</u>

I°/ <u>Théorème de Thalès</u> : Cas du triangle

1°/ __Théorème direct__ :

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (BC).

Si (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$.

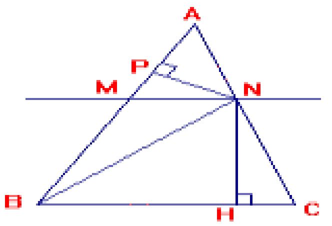


- Les triangles ABC et AMN sont dits en position de Thalès : ils sont obtenus en coupant deux droites sécantes par deux droites parallèles.

__**Démonstration**__ **:**

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N le point de (AC) tel que : (MN) // (BC).

Démontrons que : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

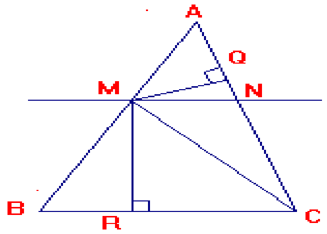


- M $\in$ [AB) et N $\in$ [AC).

On utilisera le calcul d'aire d'un triangle.

Effectuons les rapports : $\frac{aire(AMN)}{aire(ABN)}$ et $\frac{aire(AMN)}{aire(ACM)}$

$$\frac{aire(AMN)}{aire(ABN)}=\frac{AM\times\frac{NP}{2}}{AB\times\frac{NP}{2}}=\frac{AM}{AB}$$



$$\frac{aire(AMN)}{aire(ACM)}=\frac{AN\times\frac{MQ}{2}}{AC\times\frac{MQ}{2}}=\frac{AN}{AC}$$

Démontrons que : aire (ABN) = aire (ACM).

Les triangles BNC et BMC ont la même aire $\mathcal{A}$ car ils ont le côté [BC] commun et des hauteurs égales : NH = MR.

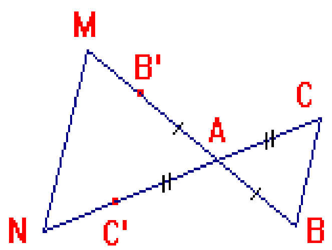
L'aire de chacun des triangles ABN et ACM est celle du triangle ABC diminuée de $\mathcal{A}$.

Donc : aire (ABN) = aire (ACM).

$\frac{aire(AMN)}{aire(ABN)}=\frac{AM}{AB}$, $\frac{aire(AMN)}{aire(ACM)}=\frac{AN}{AC}$ et aire (ABN) = aire (ACM) donc :

$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}}$$

- M $\notin$ [AB) et N $\notin$ [AC). On utilisera la symétrie de centre A et le résultat précédent.



B' est le symétrique de B par rapport à A donc : AB' = AB

C' est le symétrique de C par rapport à A donc : AC' = AC

Le symétrique de (BC) par rapport à A est (B'C') donc :
(BC) // (B'C').

D'après le résultat précédent, on a : $\frac{AB'}{AM}=\frac{AC'}{AN}$

$\frac{AB'}{AM}=\frac{AC'}{AN}$, AB' = AB et AC' = AC donc:

$$\boxed{\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

2°/ <u>Conséquence</u> :

Si deux triangles sont en position de Thalès alors les côtés correspondants sont proportionnels.

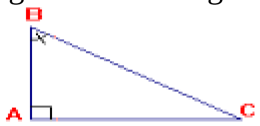
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

3°/ <u>Réciproque du Théorème de Thalès</u> :

Si les points A, M, B d'une part et les points A, N, C d'autre part, sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

II°/ <u>Relations métriques dans un triangle rectangle</u>

Soit un triangle ABC rectangle en A.



1) <u>Cosinus d'un angle aigu</u>

Définition - Notation

• Dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport :

$$\frac{\text{côté adjace}}{\text{hypoténus}}$$

• Le cosinus de l'angle $\hat{B}$ est noté cos $\hat{B}$. $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$

- **<u>Remarque</u> :** Si $\hat{B}$ est un angle aigu alors : $0 < \cos\hat{B} < 1$

2) <u>Sinus d'un angle aigu</u>

Définition - Notation

• Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport :

$$\frac{\text{côté oppos}}{\text{hypoténu}}$$

• Le sinus de l'angle $\hat{B}$ est noté sin $\hat{B}$. $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$

- **<u>Remarque</u> :** Si $\hat{B}$ est un angle aigu alors : $0 < \sin\hat{B} < 1$

3) <u>Tangente d'un angle aigu</u> :

Définition - Notation

• Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport :

$$\frac{\text{côté oppos}}{\text{côté adjace}}$$

• La tangente de l'angle $\hat{B}$ est noté tan $\hat{B}$. $\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}$

<u>Remarque</u> : $\tan\hat{B}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$

4) <u>Relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu</u> :

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

<u>Démonstration</u> :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $\hat{B}=\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{AB}{BC}$; $\cos^2\alpha=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{AB^2}{BC^2}$

$\sin\alpha=\frac{AC}{Bc}$; $\sin^2\alpha=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AC^2}{BC^2}$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$$

ABC étant un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore : $AB^2+AC^2=BC^2$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

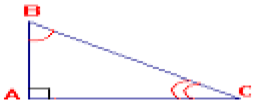
4) <u>Sinus et cosinus d'angles complémentaires</u> :

a) Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

b) Dans un triangle rectangle, les tangentes des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.

<u>Justification</u> :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ($\hat{B}+\hat{C}=90°$).



- $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$ et $\cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}$ donc : $\sin\hat{B}=\cos\hat{C}$

  $\sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}$ et $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$ donc : $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$

- $\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}$ et $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}$ donc : $\tan\hat{B}$ et $\tan\hat{C}$ sont inverses.

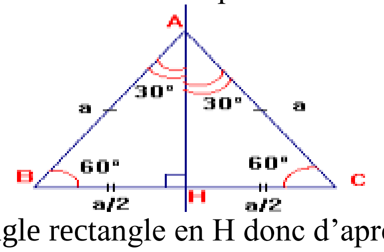
5) <u>Sinus, cosinus et tangente d'un angle de mesure 30°, 45° ou 60°</u>

$\hat{B}$	**30°**	**45°**	**60°**
sin $\hat{B}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos $\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan $\hat{B}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

<u>Justification</u> :

- **<u>Angles de 30° et 60°</u> :**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et H le pied de la hauteur issue de A.Cette hauteur issue de A est en même temps bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et médiatrice de [BC].



ABH triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

$AH^2 = AB^2 - BH^2$

$AH^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2$

$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$AH^2 = \frac{4a^2-a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$

AH ² = $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \times a}{2}$

AH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

sin $\widehat{BAH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} =$ sin30° ; $\boxed{\text{sin30° } = \dfrac{1}{2}}$

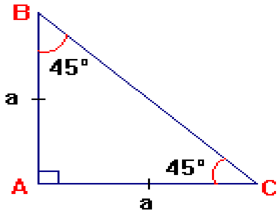
cos $\widehat{BAH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ cos30° ; $\boxed{\text{cos30° } = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

- Les angles de mesures 30° et 60° sont complémentaires donc :

sin60° = cos30° = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et cos60° = sin30° = $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{sin 60° } = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{\text{cos 60° } = \dfrac{1}{2}}$

- **Angle de 45° :**

Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet A.



ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

BC ² = AB ² + AC ²

BC ² = a ² + a ²

BC ² = 2a ²

BC = $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \sqrt{2}\ a = a\sqrt{2}$

BC = $a\sqrt{2}$

cos $\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ cos 45°

$\boxed{\text{cos 45° } = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

- Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires donc: cos $\widehat{B}$ = sin $\widehat{C} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ = sin 45°

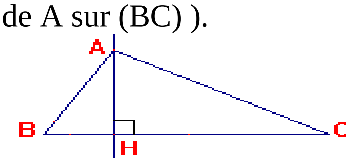
$\boxed{\text{sin 45° } = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

- **Remarque :** Pour les tangentes des angles de 30°, 45° et 60°, calculer les rapports

$\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}$; $\dfrac{\sin 45°}{\cos 45°}$; $\dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$.

6°/ Relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A (H est le projeté orthogonal de A sur (BC)).



$\boxed{\mathbf{BA^2 + AC^2 = BC^2}}$ (Démonstration : voir triangle rectangle en classe de 4ème).

$\boxed{\mathbf{AB \times AC = AH \times BC}}$ (Démonstration : voir triangle rectangle en classe de 4ème).

$\boxed{\mathbf{AB^2 = BH \times BC}}$

$\boxed{\mathbf{AC^2 = CH \times CB}}$

$\boxed{\mathbf{AH^2 = HB \times HC}}$

<u>Justification</u>:

ABC est un triangle rectangle en A. ABH et AHC sont des triangles rectangles en H.

-cos $\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$ donc : AB × AB = BH × BC

$\boxed{AB^2 = BH \times BC}$

-cos $\hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$ donc : AC × AC = BC × CH

$\boxed{AC^2 = CH \times BC}$

- tan $\hat{B} = \frac{AH}{HB}$,tan $\hat{C} = \frac{AH}{HC}$, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ étant complémentaires donc :

tan $\hat{B} = \frac{1}{\tan \hat{C}} = \frac{1}{\frac{AH}{HC}} = \frac{HC}{AH}$

tan $\hat{B} = \frac{AH}{HB}$ et tan $\hat{B} = \frac{HC}{AH}$ donc : $\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH}$

$\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH}$ donc : AH × AH = HB × HC

$\boxed{AH^2 = HB \times HC}$

Classe de 6ème

Exercice 1 :

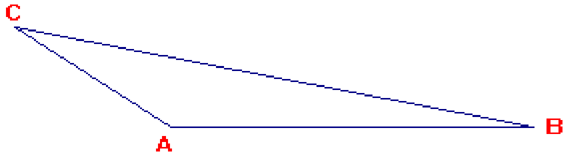
1) Construire le triangle ABC tel que AB = 2,5cm, AC = 4cm et BC = 5cm.

2) Construire un triangle EFG tel que FEG = 65° et EF = 6cm, EG = 4cm.

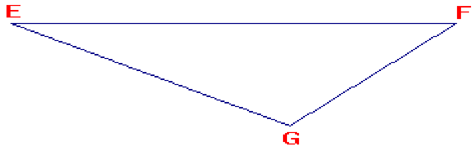
3) Construire un triangle IJK tel que IJ = 5cm, $\widehat{KIJ}$ = 35° et $\widehat{KJI}$ = 80°

Exercice 2 :

1) Construire les hauteurs et les médiatrices du triangle ABC.



2) Construire les médianes et les bissectrices du triangle EFG.



Exercice 3 :

1) a) Tracer un segment [BC] de longueur 4 cm.

b) Avec la règle et le compas, tracer un triangle ABC isocèle en A avec AB = 6cm.

c) Marquer un point A’ (distinct du point A) de façon que le triangle A’BC soit isocèle en A’ avec A’B = 6cm.

2) a) Tracer un segment [AB] de longueur 5cm.

b) Tracer un triangle ABC isocèle en A avec BC = 3cm.

Exercice 4 :

1) Tracer un triangle équilatéral de coté 5cm.

2) a) Tracer une droite (D).

b) Marquer deux points B et C symétriques par rapport à (D) tels que : BC = 4cm.

c) Marquer un point A tel que le triangle ABC soit équilatéral.

d) Tracer les axes de symétrie de ce triangle.

Exercice 5 :

1) Les côtés de l’angle droit d’un triangle rectangle ont pour longueur 35cm et 6,2 dm.
Calculer l’aire de ce triangle.

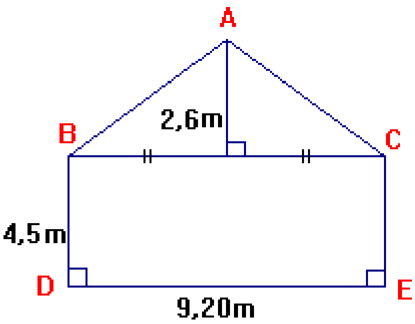
2) ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : AB = 32cm
Calculer son aire.

3) Un triangle ABC rectangle en B a une aire de 7m². On sait de plus BC = 25dm
Calculer la longueur AB.

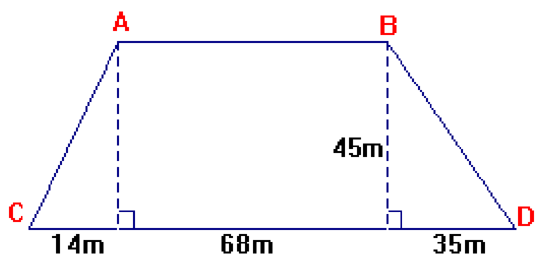
Exercice 6 :

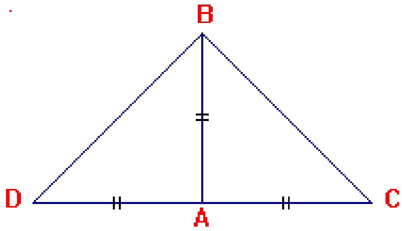
Calculer l’aire de chacune des figures suivantes.

1°)



2°) (AB) // (CD)



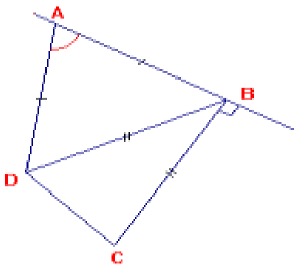


<u>Exercice</u> 1 :

1) Pourquoi D, A et C sont-ils alignés ?
2) Montrer que le triangle DBC est rectangle.
3) Montrer que le triangle DBC est isocèle.

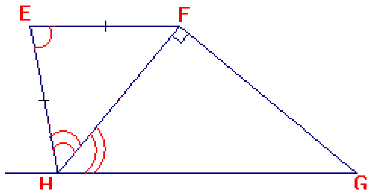
<u>Exercice</u> 2 :

1) Calculer tous les angles de la figure suivante sachant que $\hat{A} = 100°$.



2) (EF) // (HG) et $\hat{E} = 120°$.

Calculer tous les angles de cette figure.



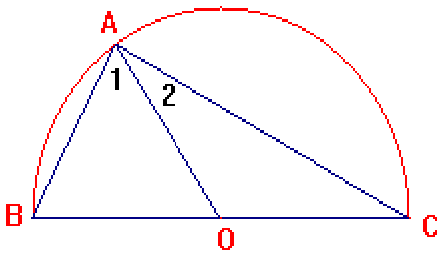
<u>Exercice</u> 3 :

a) Construire un triangle ABC tel que : AB = 5,5cm, $\hat{A} = 60°$ et AC = 4,5cm.
b) Construire les médiatrices des côtés de ce triangle puis tracer son cercle circonscrit.

<u>Exercice</u> 4 :

1) Construire un triangle DEF tel que : DE = 6cm, $\hat{D} = 110°$ et $\hat{E} = 40°$.
2) Construire le cercle circonscrit au triangle DEF.

<u>Exercice</u> 5 :



$\widehat{AOB} = 56°$, BC = 5cm. On note $\hat{A}_1 = \widehat{BAO}$, $\hat{A}_2 = \widehat{CAO}$

a) Reproduire la figure : un demi-cercle de centre O et de diamètre [BC].
b) Montrer que le triangle BAO est isocèle.

Qu'en déduire pour $\hat{A}_1$ et $\hat{B}$? Quelle est leur mesure ?

c) Pourquoi $\hat{C} = \hat{A}_2$. Calculer $\hat{A}_2$.
d) Calculer $\widehat{BAC}$. Quelle est la nature du triangle BAC ?
e) Ce résultat final ne dépend pas de la position de A sur le demi-cercle. Vérifiez-le.

Classe de $4^{ème}$

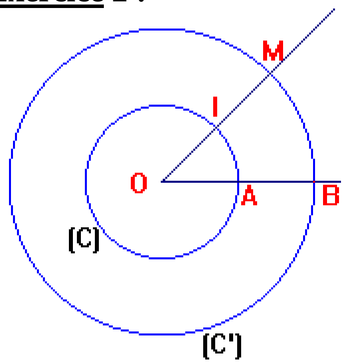
Exercice 1 :

GAF est un triangle tel que AF = 4cm. Soit B le symétrique de G par rapport à A et E celui de G par rapport à F.

a) Montrer que (AF) // (BE).

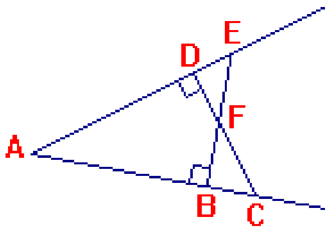
b) Calculer BE.

Exercice 2 :



C et C'sont deux cercles concentriques de centre O et rayons respectifs 2cm et 4cm.

Montrer que (IA) // (BM).



Exercice 3 :

1) Que représente F pour le triangle AEC ?

2) Que représente (AF) pour le triangle FEC ?

3) Montrer que les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

1) Déterminer si le triangle ABC est rectangle et indiquer alors l'angle droit.

AB	30	5	4,1	13	4,5	24
AC	40	6	4,6	12	7,5	7
BC	50	7	3,2	5	6	2 ,5

3) Calculer le carré de la longueur du troisième coté du triangle CNT rectangle en N et si possible la longueur elle-même sachant :

CN	3		16	4	5,6
CT	5	13	20		9
NT		12		6	

Exercice 5 :

1) Construire un triangle ABC rectangle en B d'aire 20cm² avec BC = 8cm.

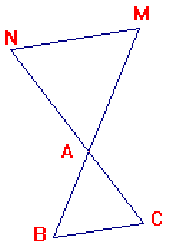
2) ABC est tel que AB = 5, AC = 4, BC = 3.

Calculer la longueur de la médiane CM.

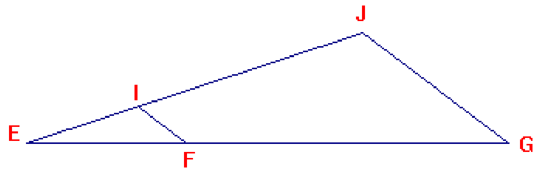
Classe de $3^{ème}$

Exercie1 :

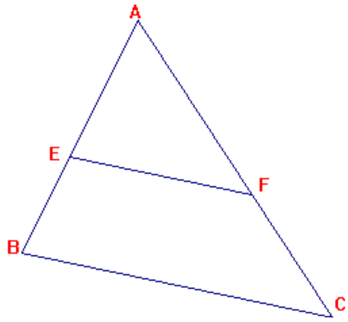
Dans chacun des cas de figures, calculer la longueur inconnue.

1) 

(MN) // (JG)
AB = 22
AC = 26
AM = 34
AN = ?

2) 

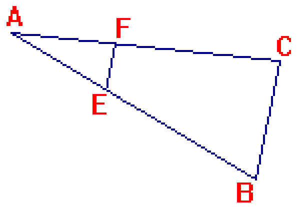
(IF) // (JG)
EJ = 6, 4
EI = 2
FG = 5, 5
EF = ?

3) 

(AB) // (EF)
AE = 3
AF = 4
EB = 2,1
FC = ?

Exercice 2 :

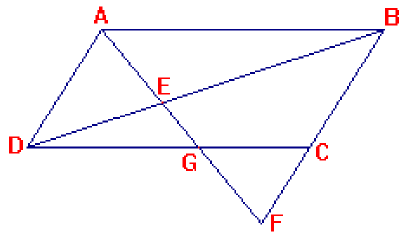
Compléter le tableau ci-dessous qui concerne la figure dans laquelle les droites (EF) et (BC) sont parallèles.



AB	AC	BC	AE	AF	EF
6	9	10	2		
15	12	6		2	
8	10	12			4
		9	5	4	6

Exercice 3 :

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Le point E est un point quelconque de la diagonale [BD]. La droite (AE) coupe (DC) en G et (BC) en F.



Montrer que : $\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{EA}{EG}=\dfrac{EF}{EA}$

En déduire que : $EA^2 = EF \times EG$.

Exercice 4 :

cos $\hat{R}$ = 0,6, cos $\hat{S}$ = 0,8. Les angles $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont-ils complémentaires?

Même question avec sin $\hat{S}$ = 0,5 et sin $\hat{R}$ = $0,5\sqrt{3}$.

Exercice 5 :

KRS est rectangle en K, de hauteur KH. Exprimer sin $\hat{S}$ et sin $\hat{R}$ à l'aide KH, SK et KR.

Déduis-en :

1) $\dfrac{KH^2}{SK^2} + \dfrac{KH^2}{KR^2} = 1$ 2) $\dfrac{1}{SK^2} + \dfrac{1}{KR^2} = \dfrac{1}{KH^2}$

Correction exercices Classe de 6ème

Exercice 5

1) A = $\frac{Base \times Hauteur}{2} = \frac{35 \times 62}{2}$ = 35 × 31 = 1085 cm²
2) AC = AB = 32 cm donc: S = $\frac{32 \times 32}{2} = 32 \times 16 = 512$ cm²
3) S = $\frac{BC \times AB}{2}$ = 700dm² donc: AB = $\frac{2 \times 700}{BC} = \frac{1400}{25}$ = 56 dm.

Exercice 6

1) Le triangle ABC a pour aire $S_1 = \frac{9{,}20 \times 2{,}60}{2}$

Le rectangle BCED a pour aire S_2 = 9,20 ×4,5
La figure ABDEC a pour aire S_1+S2

1) - ACE a pour aire $S_1 = \frac{14 \times 45}{2}$
   - BFD a pour aire $S_2 = \frac{45 \times 35}{2}$
   - ABFE a pour aire S_3 = 68 ×85
     aire totale : $S_1+S_2+S_3$

Correction exercices Classe de 5ème

Exercice 1

a) A+B+C=180° $\Rightarrow$ C=180-(A+B)=55°=A, ABC est donc isocèle de sommet B
b) C=180-90=90 donc ABC est rectangle en C
c) B=180-90=90 donc ABC est rectangle en B
d) A=180-140=40=C donc ABC est isocèle de sommet B

Exercice2

1) Ces deux angles sont égaux de somme=180°-55°=125°
   donc chacun des angles a pour mesure 125°/2=62 ,5°
2) Les deux angles à la base valent 2 × 75°=150° donc l'angle au sommet vaut
   180° - 150°=30°

Exercice 3

a)BAC=60°=ABC=ACB
BAO=90°, CAO=90°-60°=30°, OCA = 180°-60°=120° et
COA=180°-(OCA+CAO)=180°-150°=30°
b) On a CA=CB et CA=CO car CAO est isocèle de sommet C donc le cercle passe par les trois points A, B et O

Exercice 4

1) A est le milieu de [DC]
2) -ADB isocèle de sommet A donc ADB=ABD=45°
   - ABC est isocèle de sommet A donc ACB=ABC=45°
   - DBC=ABD+ ABC=90° donc le triangle DBC est rectangle en B
3) On a l'angle ACB=45°= l'angle ADB c'est à dire l'angle BDC=l'angle BCD
   donc le triangle DBC est isocèle de sommet B

<u>Exercice</u> 5
1)-ADB=ABD=180-100/2=40°
-ABD+DBC=90° donc DBC=90°-40°=50°

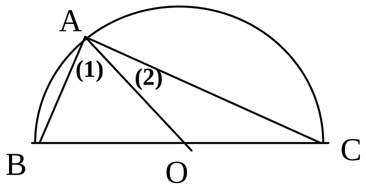
Le triangle BDC est isocèle de sommet B donc : $\widehat{BDC}$= $\widehat{BCD}$= 180-50/2=65°
2) Les angles EFH et EHF sont égaux
On a :2EHF+120°=180° donc EHF=30°=EFH
On a aussi EHF=FHG=30° donc FGH+30°+HFG=180° d'où FGH=180°-30°-90°=60°

<u>Exercice</u>6
a) Aet B sont deux points du cercle donc OA=OB ,O est alors sur la médiatrice de[AB]
b)I est sur la médiatrice de [AB] donc AIB est isocèle de même que AJB

<u>Exercice</u> 8
Ce cercle a pour centre le point d'intersection des trois médiatrices et passe par les sommets du triangle

<u>Exercice</u> 10
Le centre du cercle est le milieu de l'hypoténuse [IG]
<u>Exercice</u>11

b) Pour la vérification, on construit le cercle de centre I passant par un des points(A par exemple) et on qu'il passe aussi par les autres points B,C et D
Pour le prouver, on sait que :
-I est sur la médiatrice de [AB] donc IA=IB et aussi la médiatrice de [DC] donc ID=IC
-I est sur la médiatrice de [AC], donc IA=IC
Finalement on a IA=IB=IC=ID donc les quatre points sont sur le cercle de centre I
<u>Exercice</u>12
a)



b) A et B sont sur le cercle de centre de centre O donc OA=OB, alors BOA est isocèle de sommet O signifie A1=B. Donc 2A1+56°=180° d'où A1= 62°=B
c) OAC est isocèle donc C=A2 et 2*A2+AOC=180° or AOC=180°-56°=124°
alors A2= 28°
d) BAC=A1+A2=90° donc BAC est rectangle en A
e) Il suffit de déplacer A pour le vérifier (à partir de plusieurs positions de A)

Exercice 1 :

1) $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$. Donc $\frac{AN}{26}=\frac{34}{22}$ et AN = 26. $\frac{34}{22}=\frac{13\times 34}{11}$.

2) $\frac{EI}{EJ}=\frac{EF}{EG}=\frac{IF}{JG}$. On a aussi : $\frac{EI}{IJ}=\frac{EF}{FG}$ avec IJ = EJ – EI = 6,4 – 2 = 4,4.

Donc : $\frac{2}{4{,}4}=\frac{EF}{5{,}5}$; d'où : EF = $\frac{2\times 5{,}5}{4{,}4}=\frac{5{,}5}{2{,}2}=\frac{55}{22}$.

3) $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$. Donc : $\frac{3}{2{,}1}=\frac{4}{FC}$; d'où FC = $\frac{4\times 2{,}1}{3}=\frac{8{,}4}{3}$.

Exercice 2 :

1) AB = 6 ; AC = 9 ; BC = 10 ; AE = 2. Calculons AF et EF.

On a : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$. Donc : $\frac{2}{6}=\frac{AF}{9}=\frac{EF}{10}$ et AF = $\frac{2\times 9}{6}=\frac{18}{6}$ = 3,

EF = $\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$.

2) AB = 15 ; AC = 12 ; BC = 6 ; AF = 2. Calculons AE et EF.

On a : $\frac{AE}{15}=\frac{2}{12}=\frac{EF}{6}$. Donc : AE = $\frac{15\times 2}{12}=\frac{5}{2}$ et EF = $\frac{6\times 2}{12}$ = 1.

3) AB = 8 ; AC = 10 ; BC = 12 ; EF = 4. Calculons AE et AF.

On a : $\frac{AE}{8}=\frac{AF}{10}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Donc : AE = $\frac{8}{3}$ et AF = $\frac{10}{3}$.

4) BC = 9 ; AE = 5 ; AF = 4 ; EF = 6. Calculons AB et AC.

On a : $\frac{5}{AB}=\frac{4}{AC}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.Donc, AB = $\frac{5\times 3}{2}=\frac{15}{2}$ et AC= $\frac{4\times 3}{2}$ = 6.

Exercice 3

Les triangles AED et BEF sont en position de Thalès car (AD) // (BF).

On peut donc écrire : $\frac{EB}{ED}=\frac{EF}{EA}$ (1)

Les triangles ABE et DEG sont en position de Thalès car (AB) // (DG).

On peut donc écrire : $\frac{EB}{ED}=\frac{EA}{EG}$ (2).

D'après (1) et (2) on a : $\frac{EB}{ED}=\frac{EA}{EG}=\frac{EF}{EA}$.

D'après $\frac{EA}{EG}=\frac{EF}{EA}$, on a EA^2= EF $\times$ EG

Exercice 4

1) cos $\hat{R}$=0,6 ; cos $\hat{S}$ =0,8 ; $\sin^2\hat{S}$ = 1- $\cos^2\hat{S}$ =1-$(0.8)^2$= 1-0.64 = 0,36.

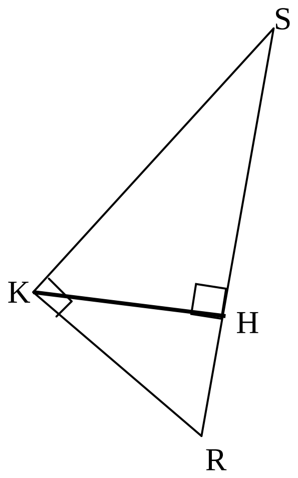
Donc Sin $\hat{S}$ = 0,6.

sin $\hat{S}$ = cos $\hat{R}$; donc $\hat{S}$ et $\hat{R}$ sont complémentaires.

2) sin $\hat{S}$ = 0,5 ; sin $\hat{R}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos^2\hat{R}$ = 1 – $\sin^2\hat{R}$ = 1 - $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ = 1-$\frac{3}{4}$ = $\frac{1}{4}$.

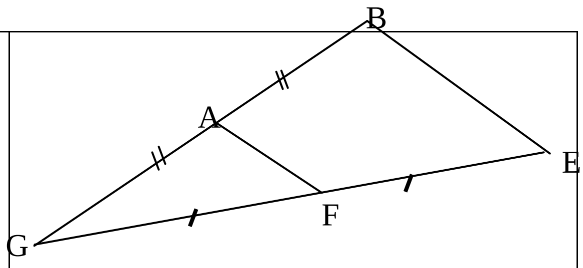
$\cos^2\hat{R}$ = $\frac{1}{4}$; cos $\hat{R}$ = $\frac{1}{2}$ = sin$\hat{S}$. Donc $\hat{S}$ et $\hat{R}$ sont complémentaires

Exercice 5

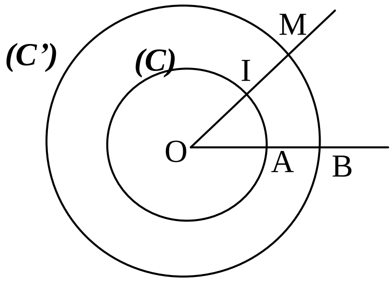
Sin S = $\dfrac{KH}{KS}$ et Sin R = $\dfrac{KH}{KR}$. 1) S et R étant complémentaires, on a : Sin R = Cos R = $\dfrac{KH}{KR}$ $Cos^2S + Sin^2S = 1$ donc $\left(\dfrac{KH}{KR}\right)^2 + \left(\dfrac{KH}{KS}\right)^2 = 1$ Ou $\dfrac{KH^2}{KR^2} + \dfrac{KH^2}{KS^2} = 1$ (1) 2) D'après (1) : KH2 $\left(\dfrac{1}{KR^2} + \dfrac{1}{KS^2}\right) = 1$ donc : $\dfrac{1}{KR^2} + \dfrac{1}{KS^2} = \dfrac{1}{KH^2}$	

Correction exercices Classe de 4ème

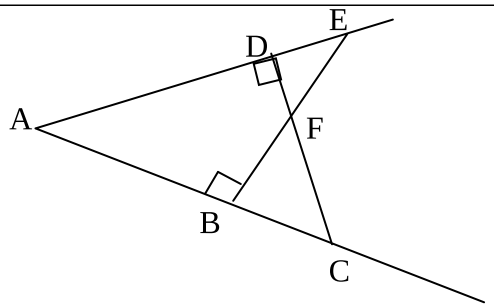
Exercice 1

a) Dans le triangle GEB, A est le milieu de [BG], F le milieu de [GE] ; d'après le théorème de la droite des milieu, (AF) // (BE). b) D'après le théorème de la droite des milieux, AF = $\dfrac{1}{2}$BE. Donc, BE = 2. AF = 8cm.	

Exercice 2

Considérons le triangle OBM. I est le milieu de [OM] et A le milieu de [OB]. D'après le théorème de la droite des milieux, (IA)//(BM)	

Exercice 3

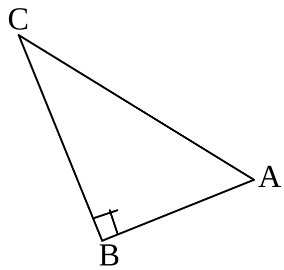
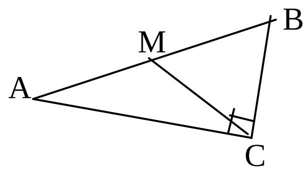
<table>
<tr>
<td>1) Considérons le triangle AEC. F est le point de rencontre de deux hauteurs de ce triangle. On sait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre. Donc F est l'orthocentre de AEC.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2) (EA) étant perpendiculaire à (CF) on a : (EA) est une hauteur du triangle EFC.
De même, (CA) est aussi hauteur de EFC. D'où A est l'orthocentre de EFC. On en déduit que la droite (AF) est la troisième hauteur du triangle EFC.
3) Puisque que (AF) est une hauteur du triangle EFC, on a : (AF) est perpendiculaire à (EC).

Exercice 4

1) a) Etudions le cas : AB = 30 ; AC= 40 et BC = 50.
$AB^2 = 900$; $AC^2 = 1600$ et $BC^2 = 2500$.
On a donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
b) Etudions le cas : AB = 5 ; AC = 6 ; et BC = 7
$AB^2 = 25$; $AC^2 = 36$ et $BC^2 = 49$. Aucun de ces trois nombres ne peut s'écrire comme somme des deux autres. Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.
2) a) Etudions le cas CN= 3, CT = 5. L'hypoténuse est CT.
On a : $NT^2 + CN^2 = CT^2$; donc: $NT^2 = CT^2 - CN^2$
$= 25 – 9 = 16$.
D'où NT = 4.
b) Etudions le cas CN = 4 et NT = 6. L'hypoténuse est CT.
On a : $NT^2 + CN^2 = CT^2$; donc: $CT^2 = 36 + 16 = 52$.

Exercice 5

<table>
<tr>
<td>1) L'aire S du triangle ABC est :
S = $\frac{BA \times BC}{2}$
20 = 4BA. Donc BA = 5.
Pour construire le triangle ABC, on mène un perpendiculaire en B à (CB) puis on place sur cette perpendiculaire un point A à 5cm de B.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2) $AB^2 = 25$; $AC^2 = 16$ et $BC^2 = 9$.
On a donc : $AB^2 = AC^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.
On sait alors que le cercle de diamètre [AB] passe par C. D'où MC = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{5}{2}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>