République du Sénégal
Ministère de l'Education Nationale
INSPECTION D'ACADEMIE DE KOLDA
IEF DE KOLDA – VELINGARA – MEDINA YORO FOULAH

COMPOSITION DU 1er SEMESTRE : EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe de TS$_2$:Durée : 04 heures

EXERCICE 1 : 6 points (1 point par réponse juste)

A) Répondre par Vrai ou Faux à ***deux des trois questions.(*** *Suite et Ln ou Suite et complexe ou Ln et complexe* ***)***

1) La fonction ln est la primitive de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ qui ne s'annule pas en 1.
2) Le nombre complexe Z est imaginaire pur si et seulement si $Z=-\overline{Z}$.
3) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$

B) Pour chacune des questions, une seule des trois propositions est exacte. L'élève doit écrire sur sa copie le numéro et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Répondre à 4 des six questions.(*Suite et Ln ou Suite et complexe ou Ln et complexe* ***)***

1) L'ensemble des solutions dans C de l'équation $\frac{z-2}{z-1}=z$ est :
   a) $\{1+i\}$; b) L'ensemble vide c) $\{1-i;1+i\}$
2) Le nombre complexe $\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de :
   a) $8\ e^{i\frac{\pi}{4}}$; b) $\sqrt{12}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$; c) $8\ e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) La dérivée de la fonction $x\longmapsto ln\sqrt{x^2+6}$ est :
   a) $x\longmapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+6}}$; b) $x\longmapsto \frac{x}{x^2+6}$; c) $x\longmapsto \frac{2x}{2\sqrt{x^2+6}}$
4) $\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est égale à : a) 0 ; b) 1 ; c) $+\infty$
5) On considère la suite (W_n) définie sur IN par $W_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$
   a) $\lim_{n\to+\infty} W_n=2$; b) $\lim_{n\to+\infty} W_n=+\infty$; c) $\lim_{n\to+\infty} W_n=\frac{1}{2}$;
6) La suite (X_n) définie sur IN par $X_n=-3+\left(\sqrt{2}\right)^n$ est :
   a) Convergente vers -3 ; b) Divergente ; c) Convergente vers 0

Exercice 2 (3,5 points) ***Traiter deux des trois exercices 2.(Suite et Ln ou Suite et complexe ou Ln et complexe)***

On donne $P(z)=z^3+2z^2+4z+8$, un polynôme d'une variable complexe z.

1) $P(z)$ admet deux racines imaginaires pures conjuguées notées z_1 et z_2, déterminer z_1 et z_2. On posera z_1 la racine dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre racine. En déduire la troisième racine de $P(z)$; on la notera z_0. **(1,5 point)**
2) Soient les points A,B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.
   a) Calculer le module et un argument du complexe $\frac{z_0-z_1}{z_0-z_2}$. **(2 points)**
   b) En déduire la nature du triangle ABC. **(1 point)**

Exercice 2'(3,5 points)*Traiter deux des trois exercices 2.(Suite et Ln ou Suite et complexe ou Ln et complexe)*

1) Développer l'expression suivante : $(x+1)(2x^2-5x+2)$ **(0,5 point)**
2) En déduire la résolution dans IR des équations suivantes :
   a) $2ln^3(x+1)-3\ln^2(x+1)-3\ln(x+1)+2=0$ **(1 point)**
   b) $2\ln x+\ln(2x-3)=\ln(3x-2)$ **(1 point)**
3) Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $2ln^3(x)-3ln^2(x)-3\,ln(x)+2<0$ **(1 point)**

Exercice 2''(3,5 points)*Traiter deux des trois exercices 2.(Suite et Ln ou Suite et complexe ou Ln et complexe)*

Soit $U_0 = \dfrac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{n+2}{2\sqrt{2}}$; $n \in IN$.

1. Calculer U_1 et U_2. ***0.5 + 0.5 pt***

2. Soit $V_n = U_n\sqrt{2} - n$.

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. ***0.75pt***

   b) Exprimer V_n en fonction de n et calculer la limite de U_n quand $n \to +\infty$. ***0.5+0.25 pt***

3. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ .Exprimer S_n en fonction de n et calculer la limite de S_n. ***0.75+0.25pt***

Problème : (10,5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x-1} & si \;\; x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$, on note C_f sa courbe dans $(O, \vec{i}\,\vec{j})$.

1-a) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f. **(0,5+0,5+0,5 point)**

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Qu'en déduire pour C_f ? **(0,5+0,5+0,5 point)**

c) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$. **(0,25+0,5+0,5 point)**

d) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 point)**

2- a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique D_1 en $+\infty$ et une asymptote oblique D_2 en $-\infty$. **(2×0,5 pt)**

b)Préciser la position de C_f par rapport à D_1 et par rapport à D_2. **(2×0,5 point)**

3- Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $[0 ; +\infty[$.

a) Montrer que g définit une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,5+0,5 point)**

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} la réciproque de g sur I. **(0,25 point)**

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(2)$. **(0,25 point)**

d) Donner alors une équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 2. **(0,25 point)**

c) Expliciter $g^{-1}(x)$. Retrouver alors les résultats de la question 3-b). **(0,5 point)**

4- Construire C_f et $C_{g^{-1}}$ dans le même repère. **(1,5 point)**

NB : ***L'élève doit traiter le problème et les exercices de deux des trois chapitres :(Suite et Ln, Suite et complexe ou Ln et complexe)***