REPUBLIQUE DU DENEGAL
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION D'ACADEMIE DE SAINT-LOUIS

Composition du premier semestre

Epreuve : mathématiques- niveau : TS1-TS3

Durée : 4h

L'élève traitera le problème et, au choix, trois parmi les quatre exercices

EXERCICE 1 : (04 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A, P un point de (BC) distinct de B et de C, $(\mathcal{C})$le cercle circonscrit à ABC.
On note $(\mathcal{C}')$le cercle passant par P et tangent à (AB) en B,. Il recoupe la droite (AP) en un point M.
On se propose de montrer que M est sur le cercle $(\mathcal{C})$
Montrer que : **(2 pts)**

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PM}\right)\ (\pi)\quad \text{puis}$$
$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{MA}\right)\ (\pi)$$

En déduire que les points A, B, C et M sont cocycliques. **(2 pts)**

EXERCICE 2 : (04 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe non nul z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1. a) Donner une relation entre les arguments de z et z'. **(0,5 pt)**
b) En déduire que les points O, M et M' sont alignés. **(0,75 pt)**

2. Démontrer que $\overline{z'+1}=\frac{1}{z}(z-1)$. **(0,75 pt)**

3. On nomme par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A contenant le point O et par $(\mathcal{C}^*)$ le cercle $(\mathcal{C})$ privé de O. Dans cette question, on suppose que M appartient à $(\mathcal{C}^*)$.
a) Justifier l'égalité : $|z-1|=1$. **(0,5 pt)**
Démontrer que $|z'+1|=|z'|$. **(0,75 pt)**
Interpréter géométriquement cette égalité. **(0,25 pt)**
b) En déduire une construction géométrique de M' à partir du point M. **(0,5 pt)**

Exercice 3 : (4 points)

Les questions 1.), 2.), 3.) et 4.) sont indépendantes.

1.) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2016} par 7. **(0,75 pt)**
2.) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnue (x, y) : $x^2 + 6x = y^2 + 8$. **(1 pt)**
3.) Soit a un entier naturel et $a=\overline{a_p\cdots a_1a_0}^{b}$, son écriture dans une base $b\geq 3$.
a) Montrer que a est divisible par $b-1$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \ \text{est divisible par}\ b-1. \qquad (\mathbf{0,5\ pt})$$

b) En déduire une règle de divisibilité par 9 dans la base 10. **(0,25 pt)**

4.) Dans un système de numérotation de base n, on considère les nombres :
$A=\overline{211},\ B=\overline{312}$ et $C=\overline{133032}$.
a) Sachant que $C=AB$, montrer que n divise 8. En déduire la valeur de n. **(0,75 pt)**
b) Ecrire A, B et C dans le système décimal. **(0,75)**

<u>Exercice 4</u> : (**04 points**)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère un triangle ABC du plan tel que, AB = 3a, AC = 4a et BC = 5a. On désigne par D le milieu de [BC].

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? (**0,5 pt**)

2. Soit m un réel de l'intervalle $I = \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ et G_m le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1 – 2m, m et m.
Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m décrit I ? (**1,25 pt**)

3. Montrer que $(1 - 2m)\, G_mA^2 + m\, G_mB^2 + mG_mC^2 = 25\, a^2 m\, (1 - m)$. (**1,25 pt**)

4. Déterminer, selon les valeurs de m, l'ensemble (E_m) des points M du plan tel que :

$$(1 - 2m)MA^2 + m\, MB^2 + mMC^2 = 25a^2.$$ (**1 pt**)

<u>PROBLEME</u> : (08 points)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(2\ln x - 1) \text{ si } x > 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal, (unité graphique : 5 cm).
On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

<u>Partie A</u> : Dans cette partie n=1.

1. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 sur [0 ; + ∞[(**0,75 pt**)
b. Etudier le sens de variation de f_1. (**1 pt**)
c. Etudier la limite de f_1 en + ∞. (**0,25 pt**)
d. Préciser la tangente à (C_1) au point O. (**0,25 pt**)

2. Soit le point M_0 d'abscisse x_0 strictement positive de (C1).
a. Montrer que la tangente en M_0 à (C_1) coupe l'axe des ordonnés en un point T_0 dont on donnera les coordonnées. (**0,5 pt**)
b. En déduire une construction simple de la tangente en M_0 à (C_1). (**0,25 pt**)

3. On désigne par A le point de (C_1) d'ordonné nul, autre que O.
Tracer la tangente en A à (C_1), puis tracer(C_1). (**0,75pt**)

<u>Partie B</u> : Dans cette partie on étudie la fonction f_n pour n ≥ 2

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur [0 ; + ∞[(**0,75 pt**)
2. Déterminer la fonction dérivée f_n' . (**0,25 pt**)
3. On désigne par x_n la valeur autre que 0, pour laquelle f_n' s'annule.
Montrer que pour entier n (n ≥ 2), on a : $1 \leq x_n < \sqrt{e}$. (**0,25 pt**)
4. a. Etudier la limite de f_n en + ∞. (**0,25 pt**)
b. Dresser, pour n ≥ 2, le tableau de variations de f_n ; en déduire que pour n ≥ 2 , $f_n(x_n) \leq -1$. (**1 pt**)
5. Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur [0 ; + ∞[la fonction $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
Etudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}). (**1 pt**)
6. Tracer soigneusement la courbe (C_2) dans le même repère que (C_1) de même que sa tangente en O. (**0,75 pt**)

Fin de l'épreuve