
République du Sénégal

Ministère de l'Education Nationale

INSPECTION D'ACADEMIE DE KOLDA

LYCEE ALPHA MOLO BALDE

COMPOSITION DU 1^{er} SEMESTRE : EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe de TS_1 :Durée : 04 heures

EXERCICE 1 : (1,5 points)

1) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7. ***(0,5pt)***
2) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7. ***(0,5pt)***
3) On considère le nombre B qui dans le système à base quatre s'écrit $\overline{2103211}^{(4)}$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 7. ***(0,5pt)***

EXERCICE 2 : (2 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ chacune des équations :
   a) $a^2 - b^2 = 24$; b) $n^3 - m^3 = 999$ ***(0,5pt) + (0,5pt)***
2) Déterminer le P.P.C.M. des nombres $n, n+1$, $n+2$, où n est un entier naturel quelconque. ***(0,5pt)***
3) Montrer que p est premier si et seulement si p divise tous les C_p^k. $(1 \leq k \leq p-1 \; et \; p \epsilon IN)$ $(\mathbf{0,5pt})$

EXERCICE 3 : (2 points)

On considère le nombre complexe $z = cos\frac{2\pi}{7} + isin\frac{2\pi}{7}$

1) On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.
   Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive. ***(0,5pt) + (0,5pt)***
2) Calculer $S + T$, puis en déduire S et T. ***(0,5pt)+ (0,25pt)+ (0,25pt)***

EXERCICE 4 : (2,5 points)

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{(1+i\sqrt{2})z+1}{z-(1+i\sqrt{2})}$

1) Préciser sur quel ensemble la fonction f est bijective. ***(0,5pt)***
2) On muni f de la loi de composition des applications, notée o.
   Calculer $f^2 = fof$ et $f^4 = f^2of^2$. ***(2×0,25pt)***
3) Démontrer que l'ensemble $F = \{f;\ f^2;\ f^3;\ f^4\}$ muni de la loi o vérifie les trois propriétés suivantes :
   (1) associativité, (2) $\forall g \in F, il\ existe\ g_0 \in F\ telque\ gog_o = g_0og = g$ et
   (3) $\forall g \in F, il\ existe\ g' \in F\ telle\ que\ gog' = g'og = g_0$ ***(3×0,5pt)***

EXERCICE 5: (2 points)

1) Déterminer les points M du plan dont l'affixe z vérifie $z - i\bar{z} = 0$ ***(0,5pt)***
2) Au point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe $f(z)$ avec $f(z) = \frac{z+\bar{z}-i}{z-iz}$.
   Sur quel domaine du plan f est-elle définie ? ***(0,5pt)***
3) Donner une forme trigonométrique de $f(i)$, en déduire $[f(i)]^4$ ***(0,5pt) + (0,5pt)***

PROBLEME :

Partie A : *Détermination complexe de la similitude directe.* ***(3 points)***

Le plan est rapporté à un repère orthonormal directe $(O;\vec{u};\ \vec{v})$. Soit Ω un point d'affixe z_o, k un réel strictement positif, θ un angle. On note s la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k.

s est définie par : $s(\Omega) = \Omega$ et si M et M' d'affixes respectives z et z' sont tels que $M \neq \Omega$ et $M' = s(M)$ alors M' est déterminé par : $\Omega M' = k\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi]$.

1) On suppose que $M \neq \Omega$, M' l'image de M par s et Ω d'affixe z_o .
   a) Déterminer $\left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right|$ et $arg\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)$ ***(0,5pt) + (0,5pt)***
   b) Déduisez-en une écriture de z' en fonction de k, z_0, θ et z. ***(0,5pt)***
2) Réciproquement, si M a pour affixe z et M' pour affixe z' tel que $z' - z_0 = ke^{i\theta}z - ke^{i\theta}z_0$, montrer que M' est l'image de M par la similitude directe de centre $\Omega(z_0)$, d'angle θ et de rapport k. ***(0,5pt)***
3) Soit $a \in \mathbb{C}^*$; soit s la similitude qui, à tout point M d'affixe z, associe M' d'affixe z', tel que $z' - z_0 = a(z - z_0)$.
   Montrer que s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\theta \equiv \arg(a)\ [2\pi]$ et de rapport $|a|$. ***(0,5pt)***
4) Donner l'écriture complexe de la similitude s de centre Ω d'affixe i, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2. ***(0,5pt)***

Partie B : *Application à l'étude d'une configuration.* ***(7 points)***

1) Soit s la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.
   Le plan est rapporté à un repère orthonormal directe $(O;\vec{u};\ \vec{v})$. On note A et B deux points distincts de O, d'affixes respectives a et b, A' et B' leurs images par s, d'affixes a' et b'.
   a) Exprimer a' et b' en fonction de a et b. ***(2× 0,25 =0,5pt)***
   b)Calculer a' et b' pour $a = 1 + i$ et $b = 3 + 2i$. Placer dans ce cas les points A, B, A' et B' sur une figure. ***(2×0,25pt=0,5pt) + (4×0,25pt =1p)***
2) On note s_A la similitude directe de centre A qui transforme B et B'.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de s_A . ***(2×0,5pt)***
   b) Montrer que s_A a pour écriture complexe $z' - a = \alpha(z - a)$ avec $\alpha = \frac{2ib-a}{b-a}$ ***(0,5pt)***
   c) Déterminer α lorsque $a = 1 + i$ et $b = 3 + 2i$ ***(0,5pt)***
3) On note s_B la similitude directe de centre B qui transforme A et A'. Déterminer de même l'écriture complexe de s_B , dans le cas général puis dans le cas ou $a = 1 + i$ et $b = 3 + 2i$ ***(0,5pt)***
4) On note C l'image de O par rapport à s_A , et D son image par rapport à s_B.
   a) Déterminer les affixes c et d des points C et D en fonction de a et b. ***(2×0,5pt)***
   b) Préciser ces affixes pour $a = 1 + i$ et $b = 3 + 2i$ et placer C et D sur la figure. ***(4×0,25pt =1p)***
5) Montrer que O est le milieu de $[CD]$. ***(0,5pt)***

FIN