REPUBLIQUE DU SENEGAL
Un Peuple – Un But – Une Foi
Ministère De l'Education Nationale

INSPECTION D'ACADEMIE DE DIOURBEL
Centre Régional de Formation des Personnels de l'Education

COMPOSITION STANDARDISEE DU PREMIER SEMESTRE 2017 Durée :04 H

MATHEMATIQUES TS$_1$

EXERCICE 1 : (04points)
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $-2i$.
1/ a/ Déterminer et construire l'ensemble $(\Delta)$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant : $(2+i)z+(2-i)\overline{z}=4$ (On pourra poser $z=x+iy$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels). 01
b/ Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$. des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant : $(z+2i)(\overline{z}-2i)=4$ (on pourra remarquer que : $\overline{z}-2i=\overline{z+2i}$ ). 01
2/ Soit $f$ l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z\,(z\neq -2i)$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z'=\dfrac{\overline{z}+4i}{\overline{z}-2i}$
a/ Vérifier que $z'-1=\dfrac{6i}{\overline{z}-2i}$ . En déduire l'égalité $BM\times AM'=6$ et déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'})$ 01
b/ On appelle $M_1$ et $M_2$ les points d'intersections de $(\Gamma)$ et $(\Delta)$ . Déterminer et construire les images par $f$ de $M_1$ et $M_2$. 01
EXERCICE 2 : (06points)
Soit $\alpha$ un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation $(E)$ d'inconnue le nombre complexe $z$ :
$(E)$: $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$
1/ Soit $z$ une solution de $(E)$.
a/ Montrer que $|1+iz|=|1-iz|$. 01
b/ En déduire que $z$ est réel. 01
2/ a/ Exprimer $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. 01
b/ Soit $z$ un nombre complexe . On pose $z=\tan\varphi$ où $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.
Ecrire l'équation portant sur $\varphi$ traduisant $(E)$ et la résoudre. 01 + 01
c/ Déterminer les solutions $z_1, z_2$ et $z_3$ de $(E)$ 01

PROBLEME : (10 points)
On se propose l'étude pour $n$ entier naturel non nul des fonctions $f_n$. définies sur $[0,+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f_n(0)=0 \\ f_n(x)=xe^{-\frac{1}{nx}}, \text{ si } x>0 \end{cases}.$$
1/ a/ Prouver que $f_n$ est continue sur $[0,+\infty[$. 0,5
b/ Etudier la dérivabilité de $f_n$ en 0. 0,5
c/ Calculer $f_n'(x)$ pour $x>0$ et justifier que $f_n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. 0,5+0,25
2/ a/ Déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$. 0,25

b/ Donner le tableau de variation de la fonction $g$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(u)=e^{-u}-(1-u)$. 0,5
En déduire que, pour tout réel $u \geq 0$, on a la relation
$(1)$ $\quad 0 \leq 1-e^{-u} \leq u$. 0,5

c/ Déduire de $(1)$ que , pour tout $t \geq 0$, on a la relation $(2): 0 \leq e^{-t}-(1-t) \leq \frac{t^2}{2}$ . 0,5

d/ Prouver à l'aide de $(2)$ que pour tout réel $x>0: 0 \leq f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$. 0,5

En déduire que la droite $(D_n)$ d'équation $y=x-\frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe représentative $(C_n)$ de $f_n$. 0,25

Préciser la position relative de $(C_n)$ et de $(D_n)$. 0,25

3/ a/ Dresser le tableau de variations de $f_n$. 0,5

b/ Tracer la courbe $(C_1)$ et son asymptote, en précisant la tangente en 0 . 01,25

4/ Démontrer que, pour tout $n>0$ , l'équation $xe^{-\frac{1}{nx}}=1$ a une unique solution $\alpha_n$ dans $]0,+\infty[$. 0,25

5/ Démontrer que $\alpha_n$ est solution de l'équation : $x\ln x=\frac{1}{n}$. 0,25

6/ Soit $h$ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $h(x)=x\ln x$

a/ Etudier les variations de $h$. 0,5

b/ Prouver que $1{,}76<\alpha_1<1{,}77$. 0,25

c/ Prouver que la suite $(\alpha_n)$ est décroissante. 0,25

7/ a/ Justifier que la suite $(\alpha_n)$ converge et que sa limite est supérieure ou égale à 1. 0,25+0,25

b/ Démontrer que $h(\alpha)=0$ . En déduire la valeur de $\alpha$ . 0,25+0,25