BACCALAUREAT BLANC 2017

LYCEE DES PARCELLES ASSAINIES UNITE 13

EPREUVE DE MATHEMATIQUES TERMINALE S1

NB : **La qualité de la rédaction, la clarté et la pertinence du raisonnement seront prises en compte pour une grande partie dans l'appréciation de la copie .**

EXERCICE : I (6 points)

I/ Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{tanx} \frac{dt}{1+t^2}$

1) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$ **(1pt)**
2) En déduire que pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = x$ puis calculer la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$ **(1pt)**

II/ Pour tout entier naturel n ,on donne la fonction f_n définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{sinx} & si\ x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) = 2n+2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité f_n de en 0. **(0,5pt)**
2) On pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$
   a) Montrer que U_n est bien définie et calculer U_0. **(0,5pt)**
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$ **(0,75pt)**
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ **(0,5pt)**
   d) Calculer pour $p \in IN$, $\int_0^1 x^{2p}dx$ **(0,25pt)**
   e) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$ **(0,5pt)**
   f) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :$\left| U_n - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \le \frac{2}{2n+3}$ **(0,5pt)**
   g) En déduire que la suite (U_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$. **(0,5pt)**

EXERCICE : II (4 points)

1) On se propose ici de résoudre dans Z, l'équation : $35x - 26y = 4$ $(\mathbf{1})$
   a) Montrer que 35 et 26 sont premiers entre eux.
   (On déterminera les coefficients de Bézout) $(\mathbf{0,5pt})$
   b) En déduire une solution particulière de $(\mathbf{1})$ notée $(x_{0,}\ y_0)$ $(\mathbf{0,25pt})$
   c) En déduire la résolution de $(\mathbf{1})$ $(\mathbf{0,5pt})$
2) **Application** : **Cryptographie**
   On assimile les lettres de l'alphabet A,B,…,Z aux nombres 0,1,….25 et on code ces nombres par la fonction de hachage $f: x \to 35x\ [26]$
   Autrement dit, $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $35x$ par 26
   Par exemple la lettre B est assimilée au nombre 1 et $f(1) = 9$ est assimilée à J.
   Donc B sera codé par J. Le problème de décodage se travaille dans l'autre sens
   a) Coder le mot LUNDI $(\mathbf{0,75pt})$
   b) Justifier que décoder E revient à résoudre l'équation de la question $(\mathbf{1})$ $(\mathbf{1pt})$
   c) Décoder EKX $(\mathbf{1pt})$

EXERCICE : ***III*** **(4 points)**

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 6cos(x)$
   a) Déterminer a pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = a\, cos(x)$ soit solution de (E). **($0,25$pt)**
   b) Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si la fonction numérique $(f - g)$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 4y = 0$. **($0,25$pt)**
   c) Résoudre l'équation (E') et en déduire la solution générale de (E). .
   Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(0) = 1 \;\; et \; y'(0) = 0$. **($0,5$pt)**
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$) d'unité graphique 2 cm.
   On considère la courbe Γ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \end{cases} \qquad t \in IR$$

   a) Comparer les points de paramètres 2π + t et t, puis les points de paramètre -t et t.
   En déduire qu'il suffit d'étudier les fonctions x et y dans l'intervalle [0 ; π] pour pouvoir tracer la courbe Γ. **($0,25 \times 3 = 0,75$pt)**
   b) Etudier les fonctions x et y dans l'intervalle [0 ; π] et dresser un unique tableau de variation pour ces deux fonctions. **($0,5 + 0,5 + 0,25 = 1,25$pt)**
   c) Tracer la courbe Γ en précisant ses intersections avec les axes de coordonnées. **(1pt)**

EXERCICE : ***IV*** **(6 points)**

Dans le plan orienté, on considère les points A et B distincts. On note r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M on note M_1 l'image de M par r_A et M_2 l'image de M par r_B.

On pose $T = r_B \circ r_A{}^{-1}$ ou $r_A{}^{-1}$ désigne l'application reciproque r_A.

1) a) Construire l'image C de A par T. **($0,5$pt)**
   b) Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de T. **($0,75$pt)**
   c) Déduire du b) la nature du quadrilatère M_1M_2CA. **($0,5$pt)**
2) On suppose que le point M décrit le cercle $(\mathcal{T})$ de diamètre $[AB]$.
   On appelle I le milieu de $[M_1M_2]$ et J le milieu de $[AM_2]$.
   a) Déterminer le lieu de M_1 puis de J quand M décrit $(\mathcal{T})$. **($1 + 0,75 = 1,75$pt)**
   b) Démontrer que I est l'image de M par la composée $t_1 \circ r_A$ de r_A et d'une translation t_1 dont le vecteur indépendant de M. **($0,75$pt)**
   c) Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de $t_1 \circ r_A$
   (décomposer r_A et t_1 en symétries axiales) **(1pt)**
   d) Déterminer le lieu de I quand M décrit $(\mathcal{T})$. **($0,75$pt)**

Bonne Chance