LYCEE BLAISE DIAGNE CELLULE DE MATHEMATIQUES

PROPOSITION DE SUJET BAC BLANC

SERIE S1 Durée :4 heures

***Exercice 1 :* 4 points**

Soit a un réel fixé, strictement positif.

Soit f_a la fonction définie sur IR par : $f_a(x)=(a-x)e^x$ et soit (C_a) sa courbe représentative dans le plan P rapporte à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) *Etudier la variation de f_a. Démontrer que f_a admet un maximum en x_a. Déterminer x_a.*
   Soit M_a point de coordonnées $[x_a, f_a(x_a)]$. Déterminer et construire l'ensemble décrit par M_a quand a décrit IR^*_+.
2) *Par une intégration par parties, démontrer que $\int_0^a te^t dt = ae^a - \int_0^a e^t dt$. En déduire*
   $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$
3) *Soit $n \in IN^*$ et $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}e^t dt$. Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.*
4) *Démontrer par récurrence $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!} + I_n$ et que $0 \le I_n \le \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$.*
5) *Soit $U_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout*
   $n \ge n_0 \quad U_{n+1} \le \frac{1}{2}U_n$ *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.*
   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$.

***Exercice 2 :* 5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1;\ b = e^{i\frac{\pi}{3}};\ c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

1) .
   a) *Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d*
   b) *Représenter les points A, B, C et D.*
2) *Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude plane directe s de centre O qui transforme A en C.*
3) *On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement.*

Montrer que les points F, C et G sont alignés.

4) *On considère la transformation φ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$*

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ, la réflexion d'axe δ

a) *Soit r la transformation qui, à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que :* $z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.
Exprimer r sous sa forme complexe simplifiée en faisant apparaître l'affixe de son centre.

b) *Exprimer φ sous la forme d'une composée de deux transformations que l'on déterminera.*

c) *Déterminer deux points invariants de φ et en déduire la nature de φ.*

d) *Déterminer graphiquement $\varphi(C)$.*

<u>PROBLEME :</u> 11 points

Le but du problème est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ ,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$$

Soit n un entier naturel strictement positif.

Soit g la fonction définie sur $R - \{-1;1\}$ *par* $g(x) = ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| - 2x$.

Soit f_n la fonction définie sur R par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Partie A

Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$

1.) *Montrer que (C) est symétrique par rapport à O .*

2.a) Etudier g.

b) Montrer que (C) admet une asymptote oblique en plus et moins l'infini

c) Tracer (C).

3.) Montrer que : $\forall\, x \in]0:1\,[\ ,\ g(x) > 0$.

Partie B.

1. *Montrer que :* $ln\left(\frac{f_n(x+n)}{f_n(n-x)}\right) = ng\left(\frac{x}{n}\right)$
2. *En déduire que :* $\forall\, x \in]0{:}\,n[\ ,\ f_n(n+x) > f_n(n-x)$.
3. *Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de* f_n .
   a. *Montrer que* $(\,x \to F(n+x)\,)$ *est une primitive de* $(\,x \to f_n(n+x)\,)$ *et que* $(\,x \to -F(n-x)\,)$ *est une primitive de* $(\,x \to f_n(n-x)\,)$.
   b. *En déduire les égalités :* $\int_0^n f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n-t)dt$ *et* $\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n+t)dt$
4. *En déduire que :* $\int_0^n f_n(t)dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt$.

Partie C

1) *Pour tout réel* $x \in \mathbb{R}^+$ *, on pose* $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

a) *Calculer* $I_1(x)$.

b) *Donner une relation entre* $I_{n+1}(x)$ *et* $I_n(x)$.

c) *Montrer que par récurrence que :* $\int_0^x f_n(t)dt = n!(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!})$.

2) *En déduire, pour n fixé, que :* $lim_{x\to+\infty}(\int_0^x f_n(t)dt) = n!$.

3) *En déduire, à l'aide du B]4), que :* $2\int_0^n f_n(t)dt < \int_0^{2n} f_n(t)dt < n!$.

4) *En déduire, à l'aide du C] 1c) et 3), que :* $\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.