I.A Dakar — Année scolaire 2016/2017

Classe : TS_2 — Durée : 04h

Examen baccalauréat blanc

Exercice 1 : 9pts

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct ,on considère l'application f du plan dans le plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' $=\frac{1}{2}iz+\frac{1-3i}{2}$.

1.Montre que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω ,le rapport k et l'angle θ.(0.25+1.5pt)

2. Soit M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3i$. Pour tout entier naturel n , $M_{n+1}=f(M_n)$.

a) En utilisant la première question , calcule ΩM_n en fonction de n .(0.75pt)

b) Place les points M_0,M_1, M_2, M_3 et M_4. (1.25pt)

c) A partir de quel rang n_0 a -t-on : « pour tout $n \geq n_0$,M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0.05$ ».(0.5pt)

3.a) Calcule M_0M_1 .(1pt)

b) Pour tout entier naturel n , on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montre que (d_n)est une suite géomètrique dont on précisera la raison et le premier terme .(1pt)

c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots\ldots\ldots d_{n-1} + d_n$. Calcule l_n en fonction de n .Déduis-en la limite de l_n en $+\infty$. (0.75pt +0.25pt)

4. Pour tout entier naturel non nul n ,on note G_n l'isobarycentre des points $M_0,M_1,M_2, \ldots\ldots,M_{n-1},M_n$.

a) Montre que pour tout entier naturel non nul n ,$\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$. (1pt)

b) Déduis-en la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0.75pt)

Problème :11pts

Parti A : On considère la fonction f définie sur lR par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ et (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé unité graphique 3cm.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.

a) Etudie le sens de variation de g et calcule $g(e^x)$ pour tout réel x.(0.5pt+0.5pt+0.5pt)

b) Détermine le signe g(t) pour tout $t \in [0,+\infty[$.(0.5pt)

2-a) Calcule f '(x) ,la fonction dérivée de f et montre que $f'(x) = e^{-x}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]$. (0.5pt+0.25pt)

b)En utilisant 1°) étudie le sens de variation de f. (0.5 pt)

3-a) Montre que pour tout réel , $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ .Déduis-en $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (0.5pt+0.25pt)

b)Détermine $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (0.5pt)

c) Trace la courbe (C) et ses asymptotes (0.5pt+0.25pt)

Parti B

1.a) Etudie les variations de la fonction h définie par h(x) = f(x)-x.(0.5pt+0.25pt)

b) Déduis-en que f(x)=x admet une unique solution $\alpha \in]0,5; 0,6[$.(0.5pt)

2.Démontre que pour tout réel x tel que :$0,5 \leq x \leq 0,6$,ona :

a) $0,5 \leq f(x) \leq 0,6$;(0.75pt)

b)$-0,25 \leq f'(x) \leq 0$. (0.5pt)

c) Déduis-en que $|f'(x)| \leq 0,25$. (0.25pt)

3.On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0,5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Etudie le sens de variation de la suite (U_n) . (0.75pt)

b)Démontre que pour tout entier n ,$|U_{n+1} - \alpha| \leq (0,25)|U_n - \alpha|$. (0.75pt)

c)Montre que $|U_n - \alpha| \leq (0,1)(0,25)^n$. (0.75pt)

d) Déduis-en la limite de la suite (U_n). (0.5pt)

e) Détermine le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier naturel n $\geq n_0$,$|U_n - \alpha| \leq 5.10^{-4}$
(0.5 pt)