Chapitre 4

VECTEURS

A - RECOMMANDATIONS

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE

On s'assurera d'abord que les compétences de quatrième concernant le chapitre «Translations et vecteurs» sont acquises.

En troisième, on introduit les opérations (somme de deux vecteurs, multiplication par un réel) pour doter les élèves de *l'outil vectoriel* qui leur donnera d'autres méthodes de démonstration.

L'acquisition par l'élève des compétences exigibles en fin de collège sur ce chapitre est indispensable pour une bonne réussite dans les classes scientifiques de lycée, non seulement en mathématiques mais aussi en physique.

II. COMPÉTENCES EXIGIBLES

Construire la somme de deux vecteurs.

Construire le produit d'un vecteur par un réel.

Connaître et utiliser les propriétés de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Connaître et utiliser la relation de Chasles.

Connaître et utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour démontrer :

- que deux droites sont parallèles ;
- que trois points sont alignés.

III. PRÉREQUIS

Caractérisation vectorielle du parallélogramme.

Propriétés de la translation.

Propriété de Thalès.

IV. ADÉQUATION DU LIVRE CIAM AU PROGRAMME SÉNÉGALAIS

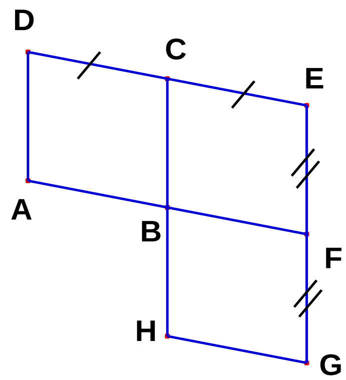
PARTIES TRAITÉES	HORS PROGRAMME	PARTIES À AJOUTER
Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.	Néant	Addition vectorielle, vecteur nul, opposé d'un vecteur : cf CIAM 4°.

B. COURS

I. CONSOLIDATION DES PRÉREQUIS

Activité 1 : *Objectif : faire le bilan des prérequis sur les vecteurs et les parallélogrammes.*

Énoncé : sur la figure ci-contre,
ABCD, BFEC et HGFB sont des parallélogrammes tels que C et F soient les milieux respectifs de [DE] et [EG];



1. Justifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HG}$. Déduis en la nature du quadrilatère BDCF.

2. Justifie que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HB}$. Déduis en la nature du quadrilatère ACFH.

3. Parmi les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{HC}$,
quels sont ceux qui sont :

a. de même direction ? b. de même sens ?
c. de même longueur ? d. égaux ?

Activité 2 *Objectif* : faire le bilan des prérequis sur les vecteurs et les translations.

On donne trois points M, A, T non alignés.

a) Quelle est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{MA}$?

b) Quelle est l'image de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{TM}$?

c) Quel est le point dont l'image est A par la translation de vecteur $\overrightarrow{TA}$?

d) Quel est le vecteur de la translation qui transforme M en T ?

e) Construis le point H image de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$. Justifie la nature du quadrilatère MATH .

f) Construis l'image de la droite (AH) par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$.

II. ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE

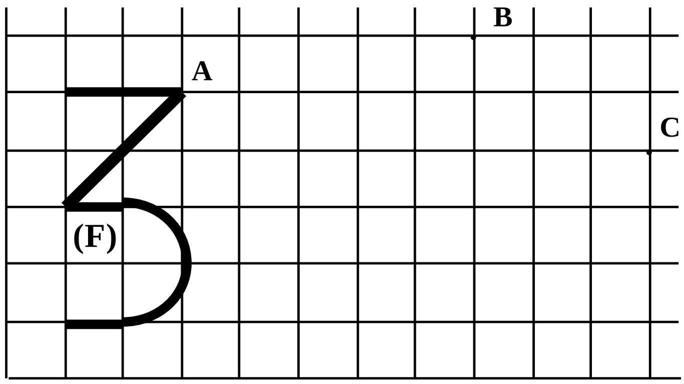
Objectif :Introduire l'addition de deux vecteurs et la relation de Chasles.

Reproduis sur papier quadrillé la figure (F) ci-contre, puis construis :

- l'image (F_1) de (F) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- l'image (F_2) de (F_1) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Compare (F_2) et l'image de (F) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Quelle remarque peut-on faire ?



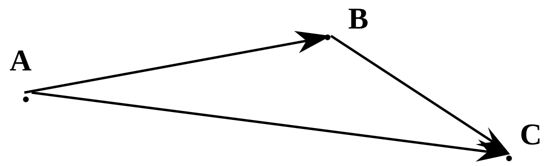
Commentaire

L'action de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

équivaut à

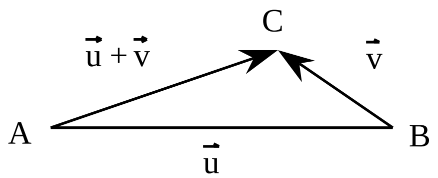
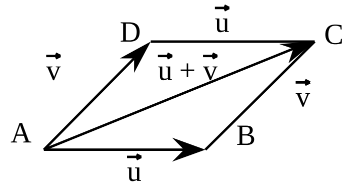
l'action de la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On note : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

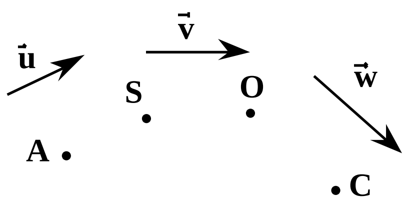


III. ADDITION VECTORIELLE ET RELATION DE CHASLES

ACTIVITÉ	TRACE ÉCRITE
Activité 1 On donne trois points du plan A, B et C. M est un point quelconque du plan. 1) Construis le point N image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point O image du point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. 2) Justifie la nature des quadrilatères MABN et NBCO. 3) Démontre que : $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AC}$.	**1. Addition vectorielle** Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, t' la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. La succession des translations t et t´ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. *On dit que $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.* **2. Relation de Chasles** Des points A, B et C étant donnés on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette égalité traduit la relation de Chasles

4) Conclus sur l'effet de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. 5) Construis le point P tel que MNOP soit un parallélogramme. Que peut-on dire de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?	**3. Configuration** La configuration du triangle illustre la relation de Chasles. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$  Cette relation est aussi représentée par la configuration du parallélogramme. Soit ABCD un parallélogramme : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$  D'après ces égalités, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ On dit que l'addition vectorielle est commutative.

IV. PROPRIÉTÉS DE L'ADDITION VECTORIELLE

ACTIVITÉ CORRESPONDANTE	TRACE ÉCRITE
Activité 2 1) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le point A étant donnés , construis les points S, O et C tels que : $\overrightarrow{AS} = \vec{u}$, $\overrightarrow{SO} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. 2) Construis alors les vecteurs $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SO}$, et $(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SO}) + \overrightarrow{OC}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AS} + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})$. 3) Que constates-tu à propos de la somme des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? 4) Justifie ta conjecture au moyen de la relation de Chasles.  	**1. Associativité** **Propriété** On a toujours : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ La commutativité et l'associativité font que pour effectuer une addition de plusieurs vecteurs, je peux changer l'ordre des termes à ma convenance. **Exemple** $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AS}$ $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CS}$

ACTIVITÉS CORRESPONDANTES	TRACE ÉCRITE

Activité 3

1. Complète : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \dots$

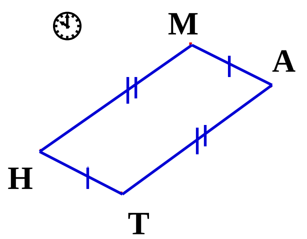
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \dots$

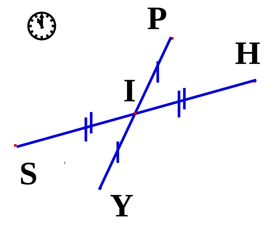
2. Que peux-tu dire de la direction, du sens et de la longueur de $\overrightarrow{BB}$?

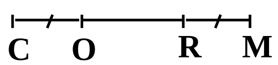
Activité 4

1) Que peux-tu dire des directions, sens et longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$

2) Dans les configurations suivantes, trouve des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} + \vec{v}$ soit égal au vecteur nul.







Activité 5

A, B, C sont trois points quelconques du plan.

1. Construis le vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

2. Le vecteur nul

Par définition, le vecteur nul est le vecteur de longueur nulle. Il est noté $\vec{0}$, et ce symbole se lit "vecteur nul" .
Pour tous les points M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

La translation de vecteur nul ne déplace aucun point du plan. On a toujours :

$$t_{\vec{0}}(M) = M$$

3. Vecteurs opposés

Deux vecteurs opposés sont deux vecteurs qui ont la même direction, des sens contraires et la même longueur.
Deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est égale au vecteur nul.
Ainsi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note :
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

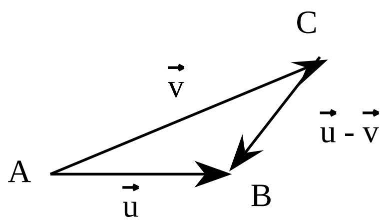
4. Autre formulation de la relation de Chasles

Soient A, B, C trois points quelconques du plan. On a avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

D'où l'autre formulation de la relation de Chasles exprimant un vecteur comme différence de deux vecteurs de même origine.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



5. Milieu d'un segment

I est le milieu du segment [AB] *équivaut à* :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

ou encore à :

$$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$$

V. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

ACTIVITÉ	TRACE ÉCRITE

Activité 6

Ousmane part du point A à 8 h. Il se déplace à vitesse constante sur un chemin rectiligne et arrive en B à 9 h.

1) Place les points C et D représentant la position d'Ousmane à 11 h et à 12 h 30.

2) Compare les directions, sens et longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

3) Compare les directions, sens et longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

4) Ousmane quitte D pour revenir au point C. Compare les directions, sens et longueurs des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Commentaire : le professeur indiquera les notations :

$\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = 4,5\ \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{DC} = -\ 1,5\ \overrightarrow{AB}$

Activité 7

Compare les vecteurs :

$3\ \vec{u}$ et $5\ \vec{u} - 2\ \vec{u}$

$-\ 2\ \vec{u} - 2\ \vec{v}$ et $-\ 2\ (\vec{u} + \vec{v}\ )$

$-\ 2\ (3\ \vec{u})$ et $-\ 6\ \vec{u}$

Activité 8

1) Démontre que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

2) Soient quatre points A, B, C et D tels que A ≠ B et C ≠ D.

Démontre que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. Définition

Si k > 0, $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC}$ a la même direction que $\overrightarrow{AB}$, le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur AC = k AB.

Si k < 0, $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC}$ a la même direction que $\overrightarrow{AB}$, le sens contraire de $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur AC = (-k) AB.

Si k = 0, $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

2. Premières propriétés

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$(-1)\ .\ \overrightarrow{AB} = -\ \overrightarrow{AB}$

$0\ .\ \vec{u} = \vec{0}$

3. Exemple

R est le milieu de [PQ]

si et seulement si $\quad \overrightarrow{PQ} = 2\ \overrightarrow{PR}$

4. Propriétés de la multiplication

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b :

$a\ (\vec{u} + \vec{v}) = a\ \vec{u} + a\ \vec{v}$

$(a + b)\ \vec{u} = a\ \vec{u} + b\ \vec{u}$a $(b\ \vec{u}) = (ab)\ \vec{u}$

Si $k\ \vec{u} = \vec{0}$, alors k = 0 ou $\vec{u} = \vec{0}$

5. Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque :

- l'un des vecteurs est nul
- ou il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{u} = k\ \vec{v}$

Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

6. Utilisation de la colinéarité

¿ Trois points A, B et C sont alignés

équivaut à

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

¡ Soient I et J deux points distincts.

M appartient à la droite (IJ)

si et seulement si

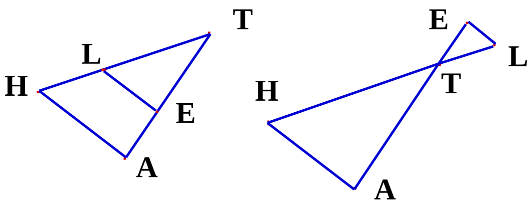
les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

¬ Soient quatre points A, B, C et D tels que A ≠ B et C ≠ D.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

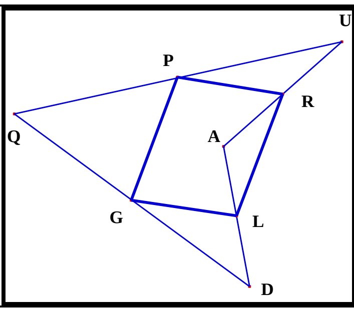
équivaut à

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

ACTIVITÉS	TRACE ÉCRITE
Activité 9 L, O, U sont trois points non alignés du plan. S est le milieu du segment [OU]. 1) Construis le point I tel que : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$ 2) Démontre que : $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = 2\ \overrightarrow{LS}$ *Commentaire* *Le professeur insistera sur cette relation vectorielle liée à la configuration du parallélogramme.*	√ **Configuration de Thalès** On peut exprimer vectoriellement la propriété de Thalès et sa réciproque. THA est un triangle, L un point de [TH] et E un point de [TA]. **Triangles en position de Thalès**  [LE] // [HA] *équivaut à* $\overrightarrow{TL} = k\ \overrightarrow{TH}$ et $\overrightarrow{TE} = k\ \overrightarrow{TA}$ **Remarque** Si $\overrightarrow{TL} = k\ \overrightarrow{TH}$ et $\overrightarrow{TE} = k\ \overrightarrow{TA}$ alors $\overrightarrow{LE} = k\ \overrightarrow{HA}$ Car $\overrightarrow{LE} = \overrightarrow{TE} - \overrightarrow{TL} = k\ (\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TH}) = k\ \overrightarrow{HA}$ ƒ On en déduit une expression vectorielle du théorème de la droite des milieux : Dans un triangle MIL tel que P soit le milieu de [MI]: Q milieu de [ML] *équivaut à* $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{IL}$

C. EXERCICES

I. EXERCICE CORRIGÉ

Énoncé Soient Q, U , A et D quatre points quelconques du plan. On note P, R, L et G les milieux respectifs de [QU], [UA], [AD] et [DQ]. 1) Construis la figure. 2) Détermine la nature du quadrilatère PRLG.	

Correction

La figure permet de conjecturer que PRLG est un parallélogramme. Un chaînage arrière conduit à démontrer par exemple que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{GL}$.

On utilise le théorème des milieux sous sa forme vectorielle deux fois :

Dans le triangle QUA, P est le milieu de [UQ] et R est le milieu de [UA].

Donc : $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$ (1)

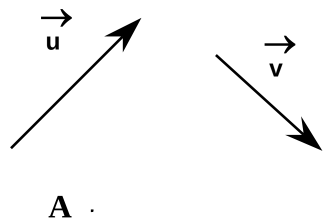
Dans le triangle QAD, G est le milieu de [DQ] et L est le milieu de [DA].

Donc : $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$ (2)

(1) et (2) entraînent que : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{GL}$.. Donc PRLG est un parallélogramme.

II. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 *construction de la somme de deux vecteurs*



Construis le vecteur d'origine A et égal au vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ de deux façons :

1.a). Construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Justifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

1.b) Construis le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ et le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$. Que peux-tu dire des points E et C ? Conclus.

C'est la méthode de la "construction bout à bout".

2) Sur une autre figure, construis le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$, le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \vec{v}$ et le point C tel que AICJ soit un parallélogramme. Justifie que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

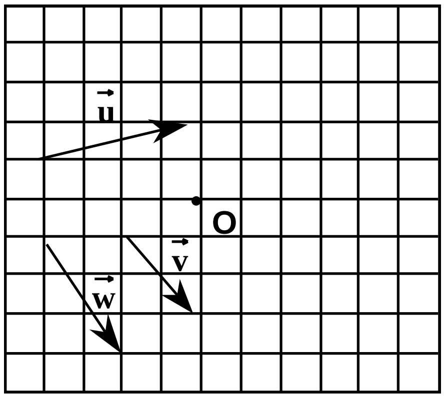
C'est la méthode du parallélogramme.

Exercice 2 *addition de plusieurs vecteurs*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, et O un point du plan .

Reproduis la figure et place les points suivants :

M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$; P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{v} + \vec{w}$; Q tel que $\overrightarrow{OQ} = \vec{w} + \vec{u}$.

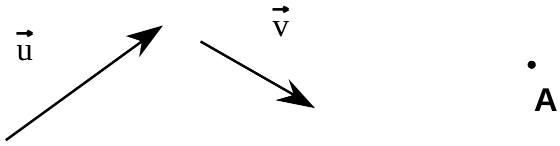


Exercice 3 *centre d'un parallélogramme*

Soit ABCD un parallélogramme et O son centre.

Calcule $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Exercice 4 *différence de deux vecteurs*



Construis les vecteurs d'origine A et égaux aux vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} - \vec{v}$ et $-\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 5 *simplification d'écritures vectorielles*

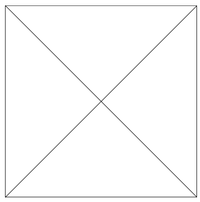
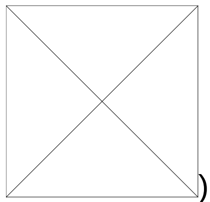
Exprime plus simplement en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, chacun des vecteurs $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$, $\vec{w_3}$, $\vec{w_4}$, $\vec{w_5}$, définis par :

$\vec{w_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) \square 2(\vec{u} \square \vec{v})$

$\vec{w_2} = \vec{u} + 2(\vec{v} \square \vec{u}) \square 3(\vec{u} \square \vec{v})$;

$\vec{w_3} = 3(\vec{u} \square 2\vec{v}) + 5 \vec{v} \square \vec{u})$;

$\vec{w_4} = 3(\vec{u} \square 2\vec{v}) + 5(\vec{v} \square \vec{u}) + (3\vec{u} + \vec{v})$;

$\vec{w_5} =$ $\frac{1}{2}$ (4  +5 ) - 3 $(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) \square \vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 6 *simplification d'écritures vectorielles*

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs ; appelons $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ les vecteurs définis par :

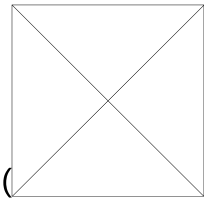
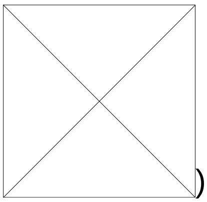
$\vec{v_1} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{v_2} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{v_3} = -3\vec{a}$.

1) Exprime en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ chacun des vecteurs suivants :

$\vec{v_1} + \vec{v_2}$; $\vec{v_1} - \vec{v_2}$;

Erreur !;

$2\ \vec{v_1} - 3\ \vec{v_2} + \vec{v_3}$;

$\frac{1}{2}$ ( + ) ;

$9\ \vec{v_1} + 3\ \vec{v_2} + 5\ \vec{v_3}$.

2) Exprime les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

Exercice 7 ***Relation de Chasles***

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O. Complète les égalités suivantes en n'utilisant que des noms de points présents sur la figure.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} =$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} =$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} =$;

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} =$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} =$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DE} =$; $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} =$.

Exercice 8 ***milieu et alignement***

Soit O, A, B trois points distincts non alignés.

1) Construis les points C, D et E tels que :

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}$.

2) Vérifie que les points C, O, D sont alignés, ainsi que E, B, D et C, A, E.

3) Justifie les alignements précédents.

Exercice 9 ***Chasles et colinéarité***

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construis les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \frac{4}{3}\ \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\ \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\ \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{5}{4}\ \overrightarrow{CD}$.

2) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Exercice 10 ***parallélisme et colinéarité***

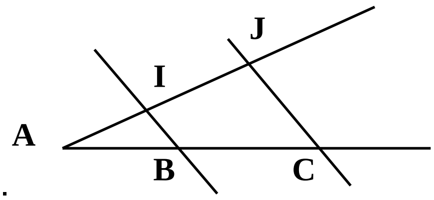
Soit ABC un triangle et B' et C' les points définis par : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{AC}$.

Démontre que les droites (BC) et (B´C´) sont parallèles.

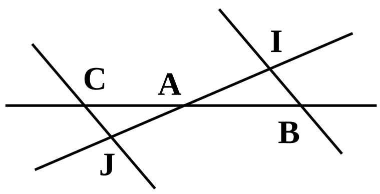
Exercice 11 ***Thalès et colinéarité***

Dans les deux figures suivantes, on a :

- (BI) // (CJ) ;
- AI = 1 et AJ = a, où a est un nombre positif.

1. 

Justifie que : $\overrightarrow{AC} = a\ \overrightarrow{AB}$

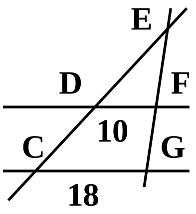
2. 

Justifie que : $\overrightarrow{AC} = -\,a\ \overrightarrow{AB}$

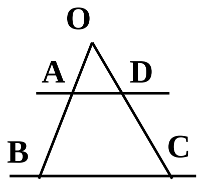
Ceci peut constituer une méthode pour

construire un vecteur colinéaire à un autre.

Exercice 12 ***Thalès et colinéarité***



On a (DF) // (CG).
Exprime $\overrightarrow{GF}$ en fonction de $\overrightarrow{GE}$.



On a (BC) // (AD).

De plus, AD = $\frac{2}{3}$ BC.

Exprime $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 13 ***Chasles et colinéarité***

1) Un triangle ABC étant donné, construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

2) Exprime le vecteur $\overrightarrow{BM}$ au moyen des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Compare les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ et précise la position du point M.

Exercice 14 ***alignement***

Soit OAB un triangle.
1) Construis les points C et D définis par :
$\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.
2) Démontre que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 15 *alignement*

Soit ABCD un parallélogramme et les points E et F définis par :

$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

Démontre que les points B, C et F sont alignés.

Exercice 16 ***alignement***

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.
Les points E et G sont tels que :
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{BC}$.
Que peux-tu dire des points A, C et G ?

Exercice 17 ***milieu***

Soient A et B deux points tels que :
AB = 1 cm.

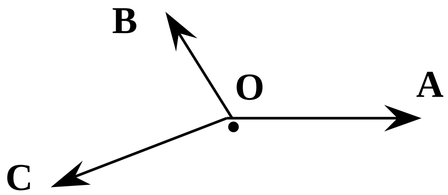
1) Place sur la droite (AB) les points C, D, E définis par :
$\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = -7\overrightarrow{AB}$.
2) Démontre que le point B est le milieu du segment [CD].
3) Soit O le milieu du segment [CB]. Démontre que le point E est le symétrique du point D par rapport à O.
4) Détermine le nombre k qui vérifie :
$\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AB}$.

III. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 18 ***BFEM 95 Sénégal***

1) On considère un segment [AB] de milieu I.
Démontre que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2) ABC est un triangle, on suppose qu'il existe un point H tel que :
$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$
En utilisant I, milieu de [AB], démontre que H est un point de [IC].

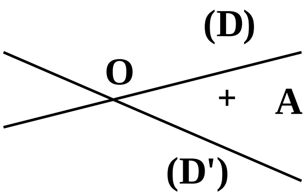
Exercice 19 ***vecteurs et forces***



Reproduis la figure suivante qui représente un «objet» de centre de gravité O, soumis à l'action de trois forces.
Construis une force, s'exerçant en O, de façon que l'« objet » reste immobile.
Indication : la somme des forces appliquées en O doit être égale au vecteur nul.

Exercice 20 ***décomposition d'un vecteur***

Soient deux droites (D) et (D') sécantes en O, et un point A n'appartenant ni à D, ni à D'.



Construis un point M de D et un point N de D', tels que : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.
Justifie l'unicité de la solution.

Exercice 21 ***colinéarité et alignement***

Soit ABC un triangle. B´ et C´ sont les milieux des côtés [AB] et [AC].
1.a). Construis les points M et N définis par $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{B'C}$.
1.b) Démontre que A, N et M sont alignés.
2) Généralisation
Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'N} = k\overrightarrow{B'C'}$ où k est un nombre réel. Démontre que les points A, N et M sont alignés.

Exercice 22 ***colinéarité et alignement***

Soit un parallélogramme ABCD. Place un point M quelconque sur la diagonale [BD].
1) Construis les points E et F vérifiant :
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$.
2) Cite deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AD}$. En déduire que MBCE est un parallélogramme.
3) Cite deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère MDCF ?
4) Démontre, en utilisant les questions précédentes, que les points E, C et F sont alignés.

Exercice 23 ***Chasles***

A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.$\overrightarrow{AC}$
Démontre que :
1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

Exercice 24 ***parallélogramme***

ABCD est un parallélogramme et M est un point quelconque du plan.
Démontre que :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Exercice 25 ***Thalès***

ABCD est un parallélogramme. Le point E est défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{11}\overrightarrow{AD}$.
F est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite parallèle à (AB) passant par E. G est le point d'intersection des droites (AC) et (EF).
Démontre que :
1) $\overrightarrow{EG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{DC}$
2) $\overrightarrow{GF} = \frac{7}{11}\overrightarrow{AB}$
3) $7\overrightarrow{EG} + 4\overrightarrow{FG} = \vec{0}$

Exercice 26 ***milieu***

ABC est un triangle.
1) Construis les points D et F tels que :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - 2\ \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC}$
2) Justifie que B est le milieu de [DF]

Exercice 27 ***triangle équilatéral***

1.a) Trace un triangle équilatéral EFG de centre O.
1.b. Construis les points P, Q et R tels que :
$\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP}$; $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ}$; $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OR}$.
1.c) Quelle est la nature du triangle PQR ? De l'hexagone ERFPGQ ?
2.a) Construis les points K, L et M tels que :
$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OK}$; $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{OL}$; $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OM}$.
2.b) Quelle est la nature du triangle KLM ?

Exercice 28 ***Brevet Bordeaux 88***

Soit un triangle ABC rectangle en A.
tel que : AB = 8 cm et AC = 6 cm.
On désigne par D le milieu du segment [AB], par I le milieu du segment [CD], par P le point d'intersection des droites (BC) et (AI), par E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$.
1.a) Calcule les longueurs BC et DC.
1.b) Détermine la tangente de l'angle $\widehat{CDA}$.
2.a) Justifie que E appartient à (AI).
2.b) Démontre que le quadrilatère BECD est un parallélogramme. On notera O son centre.
3.a) Que représente le point P dans le triangle CDE ?
3.b) Que peut-on dire du point d'intersection des droites (DP) et (EC) ?
4) Détermine le réel k tel que : $\overrightarrow{AP} = k\ \overrightarrow{PE}$.