Chapitre 2

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

A - RECOMMANDATIONS

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les élèves ont étudié en quatrième le cosinus d'un angle aigu (comme rapport de projection orthogonale) et savent le calculer pour un angle aigu d'un triangle rectangle.

Cette étude se poursuit en troisième par l'introduction du sinus et de la tangente.

Il est à remarquer que le programme ne demande pas de connaître la relation tan a = $\frac{\sin a}{\cos a}$, ni de savoir utiliser une table trigonométrique ou une calculatrice pour déduire a° de cos a°, ou l'inverse.

Ces compétences hors programme, qui sont développées dans des manuels, en particulier dans le CIAM 3°, feront l'objet d'une séance d'exercices dirigés.

On peut distinguer un segment de sa longueur, ce qui n'a pas été fait ici ; il faut néanmoins être conscient des inconvénients qui en découlent.

Certaines remarques en italique sont principalement destinées au professeur.

II. COMPÉTENCES EXIGIBLES

Connaître et utiliser :

- les définitions et les notations du cosinus, du sinus et de la tangente dans un triangle rectangle
- le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle remarquable
- la relation entre le cosinus et le sinus de deux angles complémentaires
- la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un cosinus ou un sinus ou une tangente.

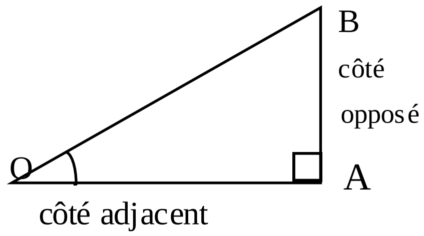
III. PRÉREQUIS

Cosinus d'un angle aigu ; théorème de Pythagore ; complémentarité des angles aigus d'un triangle rectangle ; racines carrées .

IV. ADÉQUATION DU LIVRE CIAM AU PROGRAMME SÉNÉGALAIS

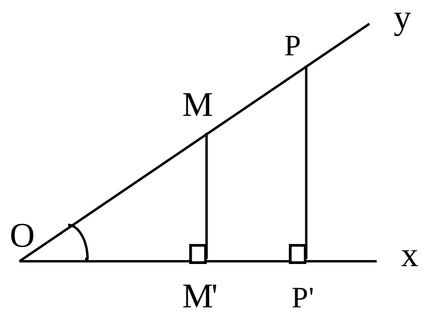
PARTIES TRAITÉES	HORS PROGRAMME	PARTIES À AJOUTER
Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ Cosinus et et sinus d'angles complémentaires Valeurs remarquables	Sinus et tangente d'un angle aigu Coordonnées d'un point du cercle C(O,1) Relation entre tangentes d'angles complémentaires $\tan = \frac{\sin}{\cos}$	

I. SINUS D'UN ANGLE AIGU D'UN TRIANGLE RECTANGLE

ACTIVITÉS	TRACE ÉCRITE
Activité 1 Trace un triangle OAB rectangle en A, avec OA = 8 cm, AB = 6 cm ; calcule OB, puis calcule cos $\widehat{AOB}$. *On considère le côté opposé à l'angle $\widehat{AOB}$.* Calcule le rapport $\frac{AB}{OB}$; ce rapport est appelé sinus de l'angle $\widehat{AOB}$.	**Définition**  Soit OAB un triangle rectangle en A. Le sinus d'un angle aigu $\widehat{AOB}$ d'un triangle rectangle est égal au rapport du côté opposé sur l'hypoténuse. On note **sin** $\widehat{AOB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{OB}$ **Rappel** **cos** $\widehat{AOB} = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

Remarque : Sinus d'un angle aigu $\boxed{\widehat{xOy}}$

On a défini en 4° le cosinus d'un angle aigu $\widehat{xOy}$, mais cette connaissance n'est pas reprise en 3° ; on peut aussi définir le sinus d'un angle aigu n'appartenant pas à priori à un triangle rectangle , par exemple sin 30°, en faisant apparaître un triangle rectangle : il suffit de prendre un point sur un des côtés de l'angle et de le projeter orthogonalement sur l'autre côté , comme ci-après.



Proposition admise

Étant donné un angle aigu $\widehat{xOy}$ M sur [Oy), et M' son projeté orthogonal sur [Ox), le rapport $\frac{MM'}{OM}$ est indépendant du point M.

Définitions

$\frac{MM'}{OM}$ est appelé **sinus** de l'angle aigu $\widehat{xOy}$, et noté : **sin** $\widehat{xOy}$.

Le sinus d'un angle aigu $\widehat{xOy}$ est égal à un rapport $\frac{MM'}{OM}$ où M est un point de [Oy) et M' son projeté orthogonal sur [Ox).

II. COSINUS ET SINUS DE DEUX ANGLES COMPLÉMENTAIRES

<table>
<tr><th>ACTIVITÉS</th><th>TRACE ÉCRITE</th></tr>
<tr><td>

Activité 2

Trace ABC rectangle en A.

Exprime sin $\widehat{ABC}$ puis cos $\widehat{BCA}$ à l'aide des côtés du triangle ABC.

Quelle relation existe-t-il entre (les mesures de) $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$?

Exprime cos $\widehat{ABC}$ et sin $\widehat{BCA}$.

Quelles égalités peux-tu en déduire ?

Formule cette relation sous la forme :

"si deux angles sont ..., alors le ..."

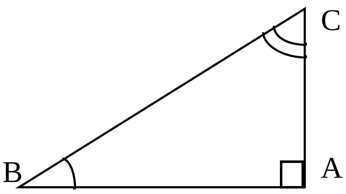
Exemple : on te donne : cos 60°= 0,5 ; quel sinus peux-tu en déduire sans calcul ?

</td><td>

Propriétés

Le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de son complémentaire.

Configuration



Traduction mathématique

Si $\widehat{B}$ + $\widehat{C}$ = 90°,

alors sin $\widehat{B}$ = cos $\widehat{C}$ et cos $\widehat{B}$ = sin $\widehat{C}$

Conséquence

Le sinus a des propriétés communes avec le cosinus ;

en particulier pour tout angle aigu $\widehat{M}$:

$0 < \sin \widehat{M} < 1$.

</td></tr>
</table>

III. ANGLES REMARQUABLES

<table>
<tr><th>ACTIVITÉS</th><th>TRACE ÉCRITE</th></tr>
<tr><td>

Activité 3

a) Calcul de cos 45° et sin 45°

Trace un triangle ABC rectangle et isocèle en A de côtés AB = AC = a.

Exprime BC à l'aide de a.

Calcule la valeur exacte de cos 45° et de
sin 45°.

b) Calcul de cos 60° et sin 60°:

Trace un triangle équilatéral ABC de côté a et trace la hauteur [AH].

Exprime BH et AH à l'aide de a.

Déduis-en cos 60°, puis sin 60°.

Peux-tu en déduire sin 30° et cos 30° ?

</td><td>

Valeurs remarquables

<table>
<tr><td>$\widehat{B}$</td><td>30°</td><td>45°</td><td>60°</td></tr>
<tr><td>cos $\widehat{B}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>sin $\widehat{B}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
</table>

Remarques

Ces valeurs remarquables sont à connaître.

Les valeurs particulières 0° et 90° sont hors programme ; elles pourront être éventuel-lement abordées.

</td></tr>
</table>

IV. RELATION FONDAMENTALE

<table>
<tr><th>ACTIVITÉS</th><th>TRACE ÉCRITE</th></tr>
<tr><td>

Activité 4

Les 3 côtés d'un triangle rectangle sont en relation par l'égalité de Pythagore ; cela a une conséquence pour le sinus et le cosinus d'un même angle aigu .

Énoncé

AOB est rectangle en A.
Écris l'égalité de Pythagore ;
Déduis-en la valeur de : $\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{OB}\right)^2$ en divisant les deux membres par OB^2.
Traduis l'égalité obtenue en utilisant le sinus et le cosinus.

</td><td>

Notation

On note $(\cos \widehat{B})^2$: $\cos^2 \widehat{B}$.

Théorème. Pour tout angle aigu $\widehat{B}$, on a :

$\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$.

En notant x la mesure de $\widehat{B}$, on a :

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

</td></tr>
</table>

V. TANGENTE D'UN ANGLE AIGU D'UN TRIANGLE RECTANGLE

<table>
<tr><th>ACTIVITÉS</th><th>TRACE ÉCRITE</th></tr>
<tr><td>

Activité 5

La tangente est un nouveau rapport trigonométrique qui permet de calculer un angle connaissant les deux côtés de l'angle droit sans avoir à connaître ou calculer l'hypoténuse.

Énoncé

Reprends OAB rectangle en A.
Considère le rapport $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$.
Ce rapport est appelé tangente de l'angle $\widehat{AOB}$.
Divise le numérateur et le dénominateur par OB et exprime le rapport obtenu à l'aide de sinus et cosinus.

Remarque

On peut définir la tangente d'un angle aigu indépendamment d'un triangle rectangle .

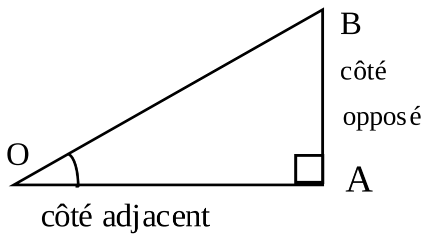
Activité 6

Détermine tan 45°;
Calcule tan 60° ; tan 30°.

</td><td>

Définition et notation

Soit OAB rectangle en A
La tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle est le rapport :
$\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$
on le note : **tan** $\widehat{AOB}$.



Remarque

tan $\widehat{AOB} = \frac{\sin}{\cos}$.

Si $\widehat{AOB}$ = x, alors $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Valeurs remarquables

$\widehat{B}$	30°	45°	60°
$\tan \widehat{B}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque

Ces valeurs remarquables sont à connaître ; pour les autres angles , on a recours à une table trigonométrique ou à une calculatrice.

</td></tr>
</table>

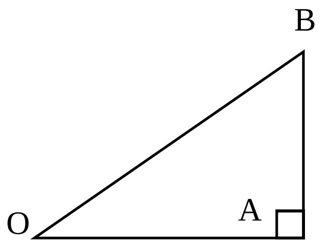
C - EXERCICES

I. EXERCICES CORRIGÉS

Enoncé 1

Construis un triangle AFB tel que sin $\widehat{F}$ = 0.4 . Déduis-en un encadrement de la mesure de $\widehat{F}$ en degrés.

Raisonnement



On analyse la question en traduisant des données :

sin $\widehat{F} = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

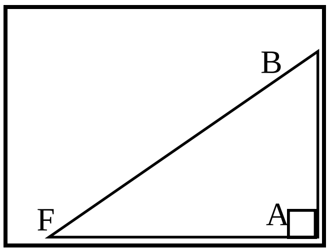
Or sin $\widehat{AOB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{OB} = \frac{2}{5}$.

Il suffit de construire un triangle FAB :

- rectangle en A
- de côté opposé opposé à $\widehat{F}$: AB = 2
- d'hypoténuse FB = 5.

1) Programme de construction. (en partant de l'angle droit $\widehat{A}$)

On trace (Ax) perpendiculaire à (Ay), puis on porte B sur (Ay) tel que AB = 2 ; on trace un cercle de centre B, de rayon 5 : il coupe (Ax) en F tel que FB = 5 ; on trace le triangle FAB.



Autre méthode : on peut partir de l'hypoténuse en utilisant la propriété : *si un point K appartient à un cercle de diamètre [BC], alors le triangle KBC est rectangle en K.*

On trace [FB] tel que FB = 5, puis le cercle (C) de diamètre [FB] ; on trace alors le cercle de centre B et de rayon 2 qui coupe (C) en deux points ; on en choisit un que l'on nomme A.

2) Calcul d'un encadrement de la mesure de $\widehat{F}$.

Remarque : on peut déterminer graphiquement une valeur approchée de $\widehat{F}$.

Méthode

On cherche dans une table trigonométrique dans la colonne des sinus la valeur 0.4.
Comme elle ne s'y trouve pas, les deux valeurs encadrant au plus près 0.4 sont 0.3907 et 0.4067 on a 0,3907...< 0,4 < 0,4067...
On détermine les angles correspondant à ces valeurs de sinus :
0,3907 = sin 23°, 0,4067 = sin 24° ;
on obtient : sin 23° < 0,4 < sin 24°, c'est-à-dire :
sin 23° < sin$\widehat{F}$ < sin 24° (1)
d'où on déduit un encadrement de $\widehat{F}$: 23° < $\widehat{F}$ < 24° (2)

Compléments 1) On ne sait pas a priori si les valeurs données par les tables sont par défaut ou par excès ; on devrait écrire sin 23° < 0,391 < 0,4 < 0,406 < sin 24°.
2) Le passage de (1) à (2) utilise la croissance de la fonction sinus sur [0°,90°]

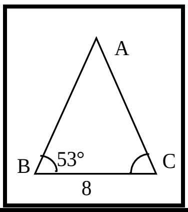
Remarque sur la rédaction

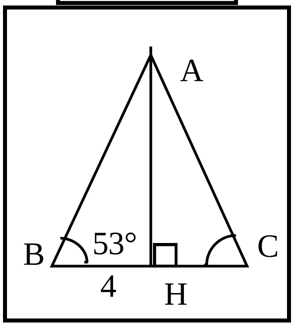
On a surtout détaillé dans tous ces exercices le raisonnement de recherche ; la rédaction d'une solution est un exercice intéressant qui n'est pas développé ici.

Enoncé 2

ABC est un triangle isocèle en A, de base BC = 8; $\widehat{B} = \widehat{C} =$ 53°.
1) Construis ABC.
2) Calcule AB (exprime la valeur exacte à l'aide de ... 53°).
3) Donne une valeur approchée de AB.

Résolution





1) On commence par faire une esquisse. La construction ne présente pas de difficulté ; il suffit de tracer [BC] de longueur 8 cm, puis de tracer (avec un rapporteur) à chaque extrémité deux demi-droites [Bx) et [Cy) telles que $\widehat{xBC} = 53° = \widehat{BCy}$; leur intersection détermine le point A.

2) calcul de AB.

Pour calculer une longueur lorsqu'on connaît des données angulaires, on peut utiliser la trigonométrie ; il faut alors disposer d'un triangle rectangle, ce qui n'est pas le cas ici.

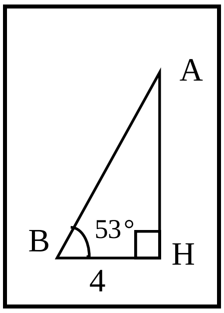
On doit *prolonger la figure*, en traçant la hauteur [AH], ce qui fait apparaître deux triangles rectangles. Choisissons l'un d'eux et *extrayons une sous-figure,* le triangle ABH rectangle en H. Comme ABC est isocèle, la hauteur [AH] est aussi médiane, donc H est le milieu de [BC] et BH = HC = $\frac{1}{2}$ BC = 4.

On a : $\cos \widehat{HBA} = \frac{BH}{BA} = \frac{4}{BA}$.

On en déduit que BA = $\frac{4}{\cos} = \frac{4}{\cos 53°}$. (valeur exacte)

3) Une valeur approchée de AB.

A l'aide d'une table trigonométrique, on obtient :
cos 53° ≈ 0,60181 ; comme on doit passer à des inverses, on peut prendre une valeur approchée moins précise : cos 53° ≈ 0,6 (par défaut), ou procéder à l'aide d'un encadrement 0,6 < cos 53° < 0,61 ;
on en déduit, par passage aux inverses (tous les nombres sont positifs, leurs inverses sont dans l'ordre inverse) : $\frac{1}{0.61} < \frac{1}{\cos 53°} < \frac{1}{0,6}$



on multiplie par 4 tous les termes de cet encadrement, et on obtient des inégalités de même sens car 4 est supérieur à 0 :

$\frac{4}{0,61} < \frac{4}{\cos 53°} < \frac{4}{0,6}$, c'est-à-dire : $\frac{4}{0,61} < AB < \frac{4}{0,6}$;

on en déduit : 6,55 < AB < 6,67.
On peut prendre AB ≈ 6,5 (valeur approchée par défaut), ou AB ≈ 6,7 (valeur approchée par excès), ou encore AB ≈ 6,6 .
Remarque : On n'a pas précisé ici l'erreur absolue, ni un majorant de cette erreur.

Enoncé 3

Etablis l'égalité : $1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

Résolution

Remarque : pour démontrer une égalité, il faut considérer un membre et le transformer jusqu'à obtenir l'autre membre ou partir d'une égalité connue et en déduire l'égalité demandée.
Si ce n'est pas dans le but de chercher une piste, il ne faut pas partir des deux membres de l'égalité donnée (la conclusion). Dans ce cas aprés la recherche, il faut écrire la démonstration dans le sens inverse de cette recherche

On observe les deux membres : ils comportent des carrés. On peut transformer l'un d'entre eux en utilisant la relation fondamentale $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, qui contient aussi des carrés .

On en déduit : $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$.

On transforme le second membre en remplaçant (substituant) $\cos^2 a$ par $1-\sin^2 a$ $\quad 2(\cos^2 a) = 2(1 - \sin^2 a)$,

d'où on déduit :

$$2(\cos^2 a) - 1 = 2(1 - \sin^2 a) - 1 .$$

On développe chaque membre et on obtient

$2\cos^2 a - 1 = 2 - 2\sin^2 a - 1 = 1- 2\sin^2 a$, ce qui est l'égalité demandée.

Autre démarche (heuristique) Si on ne trouve pas, on peut *chercher* en partant de l'égalité (on part de la conclusion, en raisonnant en *chaînage arrière)* en tranformant un ou les deux membres jusqu'à obtenir une égalité connue ou évidente.

On considère donc l'égalité :

$$1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 .$$

On peut remplacer $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$ ...;

On peut aussi transposer

$$1 + 1 = 2\cos^2 a + 2\sin^2 a$$

ce qui équivaut à :

$$2 = 2(\cos^2 a + \sin^2 a)$$

soit :

$$2 = 2 \text{ ... ce qui est vrai !}$$

La recherche est terminée ; il ne reste plus qu'à rédiger la démonstration en "remontant" dans les calculs.

Remarque

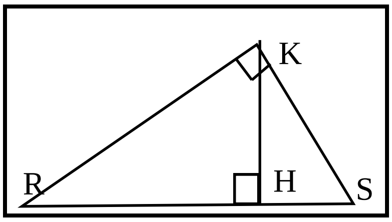
La recherche précédente n'est pas une démonstration ! Si on a raisonné par implication simple, on a seulement démontré que **si** l'égalité est vraie, **alors** cela entraîne une autre égalité vraie, mais cela ne démontre pas que la première égalité est vraie. Cela donne néanmoins un moyen de démontrer.

Enoncé 4

KRS est rectangle en K, de hauteur KH.

Démontre que : $\dfrac{KH^2}{SK^2} + \dfrac{KH^2}{KR^2} = 1.$

Résolution



On observe le premier membre : il comporte des carrés.
Cela fait penser à Pythagore, mais les deux dénominateurs sont distincts ... On peut transformer le premier membre.
On sait que :

$\dfrac{A^2}{B^2} = \left(\dfrac{A}{B}\right)^2$, donc $\dfrac{KH^2}{SK^2} = \left(\dfrac{KH}{SK}\right)^2$ et $\dfrac{KH^2}{KR^2} = \left(\dfrac{KH}{KR}\right)^2$.

On observe à présent $\dfrac{KH}{SK}$; on reconnaît un rapport trigonométrique dans le triangle SKH rectangle en H : $\dfrac{KH}{SK} = \sin \widehat{HSK}$

De même, en considérant le triangle HKR rectangle en H, on a : $\dfrac{KH}{KR} = \sin \widehat{KRH}$..

Donc $\dfrac{KH^2}{SK^2} = \sin^2 \widehat{HSK}$

et $\frac{KH^2}{KR^2} = \sin^2\widehat{KRH}$

Il s'agit de trouver une relation entre $\sin^2\widehat{HSK}$ et $\sin^2\widehat{KRH}$.

On connaît la relation fondamentale $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, qui comporte un cosinus ... on doit faire apparaître un cosinus.

Or, dans le triangle KRS rectangle en K (hypothèse), les deux angles aigus $\widehat{KRH}$ et $\widehat{HSK}$ sont complémentaires,

donc le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre : $\sin \widehat{KRH} = \cos \widehat{HSK}$.

Cela entraîne que :

$\frac{KH}{KR} = \sin \widehat{KRH} = \cos \widehat{HSK}$,

d'où $\frac{KH^2}{SK^2} + \frac{KH^2}{KR^2} = \sin^2\widehat{HSK} + \cos^2 \widehat{HSK}$,

ce qui est égal à 1.

On a donc $\frac{KH^2}{SK^2} + \frac{KH^2}{KR^2} = 1$.

Il ne reste plus qu'à rédiger une solution.

Autre méthode (heuristique, en utilisant les aires).

On part de l'égalité ; on transforme d'abord le premier membre en mettant KH^2 en facteur :

$KH^2\left(\frac{1}{SK^2} + \frac{1}{KR^2}\right) = KH^2\left(\frac{SK^2 + KR^2}{SK^2 \cdot KR^2}\right)$; or $SK^2 + KR^2 = RS^2$ (d'après le théorème de Pythagore),

donc l'égalité équivaut à

$KH^2 \cdot \frac{RS^2}{SK^2 \cdot KR^2} = 1 \iff KH^2 \cdot RS^2 = SK^2 \cdot KR^2$

<=> KH.RS = SK.KR .(car sances sont positives.

Or cette égalité est vraie car

KH.RS = 2.aire RKS = SK.KR !

Il ne reste plus qu'à remonter le raisonnement et les calculs pour rédiger une démonstration.

II. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

RSU est un triangle rectangle en U ; RS = 3, SU = 2, RU = $\sqrt{5}$.

Calcule $\cos \widehat{R}$, $\sin \widehat{R}$, $\cos \widehat{S}$, $\sin \widehat{S}$, $\tan \widehat{S}$.

Exercice 2

Trace un demi-cercle (C) de diamètre AB = 10 et place M sur (C) tel que AM = 6.

1) Nature de AMB ? Justifie.

2) Calcule $\cos \widehat{MAB}$ et $\sin \widehat{MBA}$.

3) Détermine graphiquement une mesure approchée de $\widehat{MAB}$ et de $\widehat{MBA}$.

Exercice 3

On te donne une valeur trigonométrique ; déduis-en l' autre valeur demandée :

cos a = 0.6 ; sin a = ? tan a = ?

$\sin b = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, cos b = ?

$\sin c = \frac{8}{15}$, cos c = ? tan c = ?

$\cos t = \frac{1}{3}$, sin t = ?

Exercice 4

URA est rectangle en A de hauteur AH.

Exprime $\cos \widehat{R}$, $\sin \widehat{R}$, $\cos \widehat{U}$, $\sin \widehat{U}$, $\tan \widehat{U}$.

Exprime sous forme d'un sinus, ou d'un cosinus, ou d'une tangente :

$\frac{UA}{RU}$, $\frac{RA}{RU}$, $\frac{HU}{HA}$, $\frac{HU}{RU}$, $\frac{UA}{RA}$.

Exercice 5

ABS est rectangle en B, $\cos \widehat{A} = 0,6$.

Calcule AB et BS connaissant AS :

AS = 2 ; AS = 2,5 ; AS = 4 ; AS = 6.

Exercice 6

RBKA est un parallélogramme,

(RK) ^ (KB), RB = 8, KB = 4.

Calcule $\widehat{R}$; $\widehat{B}$; RK.

Exercice 7

KGB est rectangle en B, GB = 10, KB = 10 ; la bissectrice de $\widehat{G}$ coupe (KB) en I.
Détermine la mesure de $\widehat{KGB}$ puis de $\widehat{IGB}$;
déduis-en une valeur approchée de IB.
A-t-on IB = $\frac{1}{2}$ KB ?

Exercice 8

ABCD est un trapèze isocèle de grande base[AB], AB = 180, AD = 100, DC = 80.
Calcule la hauteur et l'aire de ce trapèze.
Calcule une valeur approchée de l'angle à la base.

Exercice 9

LOSA est un losange de côté 4 cm, $\widehat{A}$ =60°.
Calcule la longueur des deux diagonales, puis l'aire.

Exercice 10

AKS est rectangle en A, SK = a, SA = k, AK = s ; complète :
s = a x...; s = ...x cos...; k = ...x sin...
s = k x tan...; a = s /...; k = s x...;
a x sin $\widehat{K}$ = b /...

Exercice 11

cos $\widehat{R}$ = 0,6, cos $\widehat{S}$ =0,8 ; les angles $\widehat{R}$ et $\widehat{S}$ sont-ils complémentaires ?
Même question avec : sin $\widehat{S}$ = 0.5,
sin $\widehat{R}$ = 0.5$\sqrt{3}$.

Exercice 12

Sachant que sin 15° = $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, vérifie que cos 15° = $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.
Donne la valeur exacte de tan 15°.

Exercice 13

BTA est rectangle en T, $\widehat{TBA}$ = 30°, BA = 14
BTI est rectangle en I, $\widehat{IBT}$ = 45°.
Calcule IT et BI.

Exercice 14

ABC est rectangle en C, BC = 4, cos $\widehat{B}$ = $\frac{1}{3}$.
Calcule AB ; AC ; tan $\widehat{B}$.

Exercice 15

Trace un triangle de côtés 4,5 ; 6 ; 7,5 .
Vérifie que ce triangle est rectangle ;
Calcule le cosinus, le sinus et la tangente de chaque angle aigu de ce triangle.

Exercice 16

RMU est rectangle en M.
Sachant... , détermine...
a) RU = 10, MU = 3 ; $\widehat{R}$ = ?, $\widehat{U}$ = ?
b) MU = 8, $\widehat{R}$ = 33°; MR = ?;
c) RU = 6, $\widehat{U}$ = 12° ; MU = ?
d) MU = 5, RU = 3 ; $\widehat{R}$ = ?

Exercice 17

Calcule la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4 cm ;
calcule l'aire de ce triangle.
Exprime la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a cm.

Exercice 18

ABC est un triangle isocèle en A, de côtés isométriques (de mêmes mesures) c, de hauteur AH.
a) Exprime AH et BC en fonction de c et $\widehat{A}$;
b) Application : sachant..., calcule...
AB = 5, $\widehat{B}$ = 45° ; BC = ? $\widehat{A}$ = ?
BC = 8, $\widehat{A}$ = 80° ; AB = ? AH = ?
AB = 6, $\widehat{A}$ = 100° ; BC = ? AH = ?
AH = 5, BC = 4 ; AB = ? $\widehat{A}$ = ?
AB = 10, AH = 8 ; BC = ? $\widehat{A}$ = ?

Exercice 19

Trace un parallélogramme ABCD de côtés
AB =10, AD = 6 ;
a) "Combien" peux-tu en tracer ?
b)Peux tu calculer l'aire de ABCD ?
b) Calcule l'aire de ABCD sachant $\widehat{BAD}$ =60°

Exercice 20

Calcule la valeur exacte de :
cos 30° + cos 30°;
$\cos^2 45° + \sin^2 30°$; $\frac{1}{\cos 60°}$ + cos 30° ;

$\frac{1}{\cos 60° + \tan 45°}$; $(\cos 45° + \sin 60°)^2$; $\left(\frac{\tan 30°}{\sin 60°}\right)^2$; $\frac{1}{\tan 60°}$; $\sin(30° + 30°)$.

III. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 21

(C) est un cercle de diamètre [AB], de rayon r, (Bx) est tangente à (C) en B ; une droite passant par A coupe (C) en M et la tangente (Bx) en T, avec $\widehat{BAT} = a$.

Exprime AM, MB, BT, AT à l'aide de a et r.

Exercice 22

Calcule la longueur d'une corde [AB] d'un cercle de rayon 3 cm, sachant que l'angle au centre $\widehat{AOB} = 60°$.

Exprime, dans le cas général, la longueur d'une corde en fonction du rayon r et de l'angle au centre a°.

Exercice 23

Soit un rectangle de côtés 12 cm et 5 cm.

a) Les diagonales de ce rectangle sont-elles perpendiculaires ?

b) Détermine l'angle aigu formé entre elles par les diagonales de ce rectangle.

Exercice 24

Trace KVA équilatéral et (C) son cercle circonscrit.

Exprime la longueur a du côté en fonction du rayon r (valeur exacte).

Exercice 25

Construis un angle $\widehat{F}$ tel que $\sin \widehat{F} = 0{,}4$;

déduis-en un encadrement de sa mesure en degrés.

Mêmes questions avec un angle $\widehat{G}$ tel que

$\cos \widehat{G} = \frac{1}{4}$.

Exercice 26

Construis un triangle LOA rectangle en A, connaissant [LO] et $\sin \widehat{ALO} = 0{,}8$.

Exercice 27

Établis les égalités : (a Œ]0°,90°[ )

1) $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

2) $1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

3) $(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a) = 2\cos^2 a - 1$

4) $1 + \frac{1}{\tan^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$.

Exercice 28

Soit [OA], OA = 4 cm ; M est un point appartenant au cercle C(O, 3), avec R tel que OARM est un parallélogramme ;

1) calcule l'aire de OARM sachant que $\widehat{AOM} = 30°$

(tu peux projeter orthogonalement M sur [OA]

2) calcule l'aire de OARM sachant que $\widehat{AOM} = 45°$

3) on pose $\widehat{AOM} = a°$; exprime l'aire de OARM à l'aide de a° (en fonction de a°).

4) Calcule le périmètre de OARM :

a) lorsque a° = 45°

b) lorsque a° = 60° ;

5) le périmètre de OARM dépend-il de a° ? Justifie ta réponse.

Exercice 29

SALU est un trapèze rectangle en A et S,

AS = a, AL = b, SU = c.

Exprime $\sin \widehat{ALU}$ et $\cos \widehat{ALU}$; déduis-en une valeur approchée de $\widehat{ALU}$ si a = 3, b = 5.

Détermine une valeur approchée de $\widehat{LUS}$.

Exercice 30

RADI est un rectangle dont les diagonales mesurent 8 cm et forment un angle de 34°.

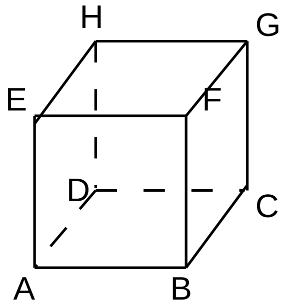
Calcule la valeur (exacte) des côtés.

Donne une valeur approchée de AD et RA sachant sin 17° ≈ 0.3.

Exercice 31

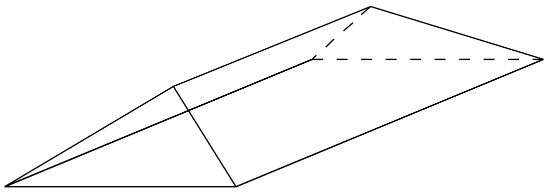
ABCDEFGH est un cube de côté a cm.

Détermine cos $\widehat{EGB}$ et sin $\widehat{EGB}$.



Exercice 32

Un tas de stockage d'arachides a pour section verticale un triangle isocèle de base 25 m, et d'angle à la base 40°.
Détermine une valeur approchée de la hauteur de ce tas.



Exercice 33

Calcule à un mm près le rayon du cercle circonscrit à un pentagone régulier (convexe) dont le côté mesure 6 cm.

Exercice 34

KRS est rectangle en K, de hauteur KH.
Exprime sin $\widehat{S}$ et sin $\widehat{R}$ à l'aide de KH, SK et KR.
Déduis-en :

1) $\dfrac{KH^2}{SK^2} + \dfrac{KH^2}{KR^2} = 1$;

2) $\dfrac{1}{SK^2} + \dfrac{1}{KR^2} = \dfrac{1}{KH^2}$.

Exercice 35

OABC est un carré de côté 4 cm, M et P sont deux points de (BC) tels que OAMP est un parallélogramme ; on pose $\widehat{AOP}$ = a°.
1) Calcule l'aire de OAMP lorsque a° = 60°
2) Calcule l'aire de OAMP lorsque a° = 45°
3) L'aire de OAMP dépend-elle de a° ? Justifie ta réponse.
4) Calcule le périmètre de OAMP:
   a) lorsque a° = 45°
   b) lorsque a° =30°.
5) Exprime le périmètre de OAMP à l'aide de a ("en fonction" de a°).

Exercice 36

Trace un quart de disque de rayon 10 cm ; gradue les deux rayons en prenant
1 cm = 0.1, et gradue l'arc de 10° en 10°.
Déduis-en graphiquement une valeur approchée de : sin 20°; cos 50°; cos 70° et
sin 80°.
Détermine graphiquement une valeur approchée de l'angle a sachant que :
cos a = 0,5 ; cos a = 0,8 ; sin a = 0,5 ;
sin a =0,6 ; cos a = 0,2 .