LE CERCLE

Ce travail sur le cercle a été réalisé par un groupe de professeurs et conseillés pédagogiques qui attendent vos suggestions pour l'améliorer.

Plan

1. **Généralités**
   - **Définition**
   - **Vocabulaire**
2. **Corde et Arc de cercle**
3. **Angle inscrit – Angle au centre**

Cercle inscrit – Cercle circonscrit à un triangle

4.
5. **Position relative d'un cercle et une droite**
6. **Position relative de deux cercles**
7. **Transformation et cercle**

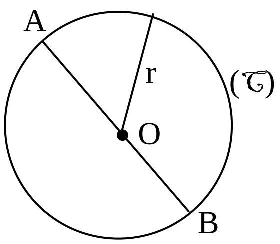
1. <u>GENERALITES</u>

<u>Définition</u>

Le cercle est une ligne fermée du plan, formée par l'ensemble des points situés à une même distance r d'un point O.

O est appelé le centre du cercle.

r est le rayon



<u>Diamètre</u>

Tout segment reliant deux points d'un cercle ($\mathcal{C}$) et passant par son centre est appelé diamètre du cercle ($\mathcal{C}$).

<u>Remarque</u> Soit [AB] un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ (O, r)

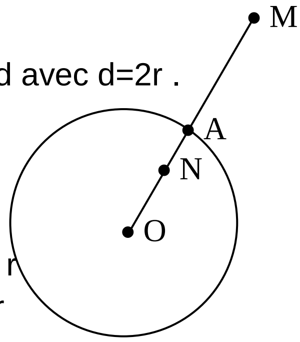
La distance AB est aussi appelée diamètre de (C). On a : AB = 2r.

Tout support d'un diamètre de ($\mathcal{C}$) est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$).

<u>Périmètre du cercle</u>

Le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2\pi r$ ou encore πd avec d=2r .

C'est la longueur d'un tour complet du cercle.



Intérieure – Extérieure d'un cercle

- Un point A appartient à $\mathcal{C}$ (O,r) si et seulement si OM = r
- Un point M est extérieur à $\mathcal{C}$ (O,r) si et seulement si OM > r
- Un point N est intérieur à $\mathcal{C}$ (O,r) si et seulement si OM < r

<u>Disque</u>

Soit un cercle $\mathcal{C}$ (O, r).

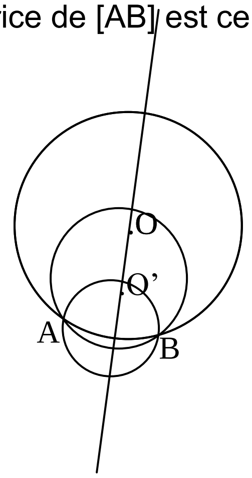
Le disque de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan tel que $OM \leq r$

L'aire d'un disque de rayon r est égale πr^2

Propriétés

- Un cercle est entièrement déterminé par la donnée :
  - de son centre et de son rayon.
  - de son centre et d'un de ses points.
  - d'un diamètre [MM']. (Le milieu de [MM'] est le centre du cercle).
- Il existe une infinité de cercles passant par deux points donnés du plan.

NB: Tout point de la médiatrice de [AB] est centre d'un cercle passant par A et B.



- Par trois points non alignés il passe un cercle et un seul.

Le centre du cercle passant par trois points non alignés est le point de rencontre de deux de ses médiatrices.

Corde et arc de cercle

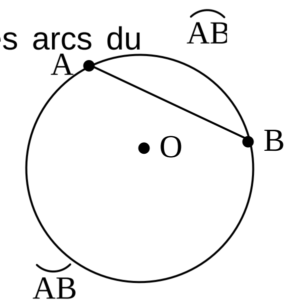
Soit A et B deux points d'un cercle ($\mathcal{C}$).de centre O

Le segment [AB] est une corde de ($\mathcal{C}$).

Les parties du cercle ($\mathcal{C}$) délimitées par les points A et B sont appelées arcs du cercle.

- L'arc qui a la plus petite longueur est notée $\overset{\frown}{AB}$.

- Celle qui a la plus grande longueur est notée $\overset{\smile}{AB}$.



NB : Tout diamètre partage le cercle en deux arcs de même longueur.

Un diamètre est la plus grande corde possible dans un cercle.

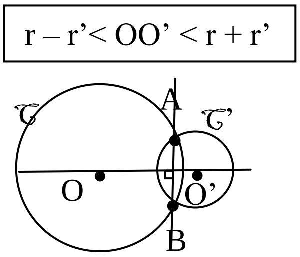
Positions relatives de deux cercles

Soit deux cercles $\mathcal{C}$ (O, r) et $\mathcal{C}'$(O', r') .

- Si O = O' et r = r' alors (C) et ($\mathcal{C}'$) sont confondus
- Si O = O' et r ≠ r' alors (C) et ($\mathcal{C}'$) sont dits concentriques.

Cercles sécants .

- Si $|r - r'| <$ OO'< r + r' alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont deux points en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants.



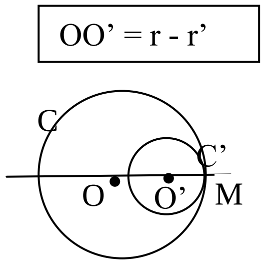
Propriété

Si les deux points sont appelés A et B on a :

- *(AB) $\perp$ (OO').*
- *(OO') est médiatrice de [AB].*

Indication : OAB et O'AB sont des triangles isocèles. Donc 'OO') est médiatrice.

- Si $|r - r'|$ = OO' alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont un et un seul point en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents intérieurement.

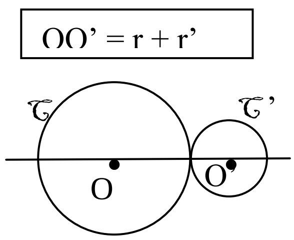


Montrons que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont un seul point en commun. Si M' est un autre point commun à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{C}')$ alors son symétrique par rapport à (OO') serait encore sur $(\mathcal{C})$ et sur $(\mathcal{C}')$ i.e que :

a) soit ils ont 3 points communs au cas où M' n'appartient pas à (OO') et alors les cercles sont confondus ;

b) soit ils ont 2 points en commun au cas M'appartient à (OO') et alors son symétrique par rapport à O appartient aux 2 cercles qui auront même rayon ce qui est impossible. Par suite les deux cercles ont un seul point en commun.

- Si OO' = r + r' alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont un et un seul point en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents extérieurement.



Les deux cercles n'ont qu'un seul point en commun A. En effet tout autre point de $(\mathcal{C})$ est extérieur à $(\mathcal{C}')$ et réciproquement d'où on a : $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{A\}$

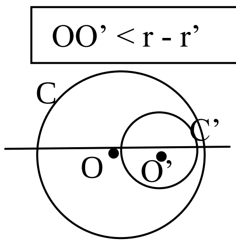
<u>Propriété</u> :

La tangente commune à (C) et (C') est perpendiculaire à (OO').

Soit (D) la tangente commune à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{C}')$. On a $(D) \perp (OA)$ et $(D) \perp (O'A)$ donc $(D) \perp (OO')$.

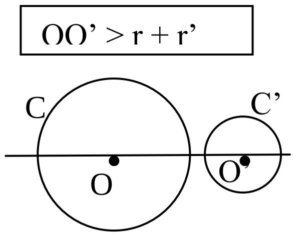
Cercles disjoints

- Si $OO' < |r - r'|$ alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ n'ont aucun point en commun et l'un est à l'intérieur de l'autre. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont disjoints.



Tout point de $(\mathcal{C}')$ est intérieur à $(\mathcal{C})$ par suite on a : $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{\}$

- Si $OO' > r + r'$ alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ n'ont aucun point en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont disjoints.



Tout point $(\mathcal{C})$ est extérieur à $(\mathcal{C}')$ par suite on a : $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{\}$

<u>Positions relatives d'un cercle et d'une droite</u>

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit (D) une droite et H le projeté orthogonal de O sur (D).

Si $OH > r$ alors $(\mathcal{C})$ et (D) n'ont aucun point en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et (D) sont disjoints.

Si $OH = r$ alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont en commun le seul point H. On dit que $(\mathcal{C})$ et (D) sont tangents en H

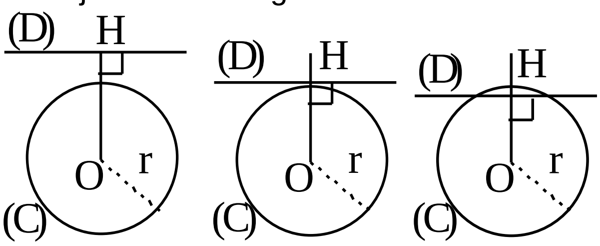
<u>Remarque</u>

(OH) et (D) sont perpendiculaires en H.

Si $OH < r$ alors (C) et (D) ont deux points A et B en commun. On dit que $(\mathcal{C})$ et (D) sont sécants.

Configurations

disjoint tangent sécant



Vocabulaire

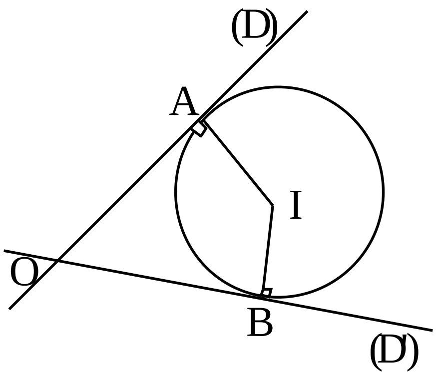
Si OH > r alors (D) et (𝒞) n'ont pas de points communs : on dit qu'ils sont disjoints

Si OH = r alors (D) et (𝒞) ont un point commun H : on dit qu'ils sont tangents.

Si OH < r alors (D) et (𝒞) ont deux points communs : on dit qu'ils sont sécants.

<u>Propriété</u>

Soit (𝒞) un cercle de centre I et de rayon r. Soit O un point extérieur à (𝒞).
Par O il passe deux et deux seules droites tangentes à (𝒞).

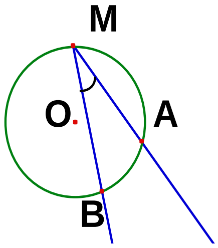


Par O il passe une droite et une seule (D) tangente à (𝒞) en un point A. La droite (OI) est un axe de symétrie de (𝒞). Le symétrique de (OA) par (OI) est une droite (OB) tangente à (𝒞) en B symétrique de A par (OA).

<u>2Angle inscrit – Angle au centre</u>

Définition

On appelle angle inscrit dans un cercle, un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont sécants à ce cercle



L’angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle de centre O.

Définition :

L'arc intercepté par un angle inscrit dans un cercle est l'arc de ce cercle ne contenant pas son sommet.
L'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc sont dits associés.

Exemple

$\widehat{AMB}$ intercepte l’arc $\overset{\frown}{AB}$ dans la figure 1.

$\widehat{AMB}$ intercepte l’arc $\overset{\frown}{AB}$ dans la figure 2.

figure 1

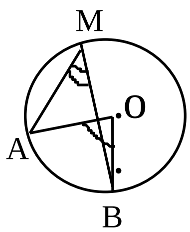
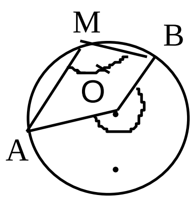


figure 2



<u>Longueur d’arc de cercle</u>

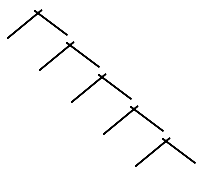
La longueur d’un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de angle au centre qui l’intercepte.
Soit A et B deux points d’un cercle de centre O et de rayon r.

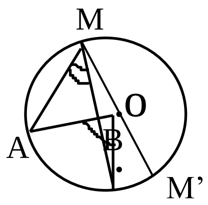
La longueur l de arc $\overset{\frown}{AB}$ est : $l = r\alpha$ où $\alpha = \text{mes } \widehat{AOB}$

Propriété

Un angle inscrit a une mesure égale à la moitié de celle de l’angle au centre associé.

$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.





Montrons que $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

a) On suppose que [MA] est un diamètre. On considère le triangle MOB isocèle en O, on a : mes $\widehat{BOM}$ + mes $\widehat{BMO}$ +mes $\widehat{OBM}$ = π or mes $\widehat{OBM}$ = mes $\widehat{BMO}$ donc on a :

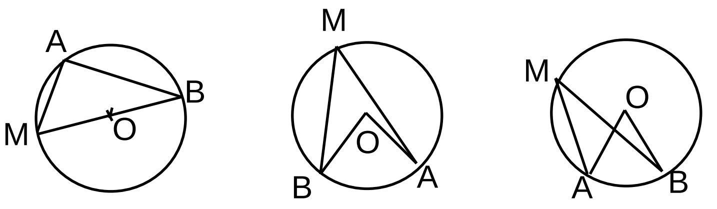
mes $\widehat{BOM}$ + 2 mes $\widehat{AMB}$ = π d'où mes $\widehat{BOM}$ = π - 2 mes $\widehat{AMB}$. On sait aussi que

mes $\widehat{AOB}$ +mes $\widehat{BOM}$ = π donc en remplaçant mes $\widehat{BOM}$ par sa valeur on a :

mes $\widehat{AOB}$ + π - 2 mes $\widehat{AMB}$ = π. Par suite on a : mes $\widehat{AOB}$ = 2 mes $\widehat{AMB}$.

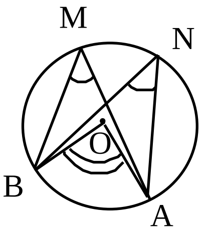
b) (AM) n'est pas un diamètre. Considérer alors le point M' diamétralement opposé à M. on a alors mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{M'MB}$ – mes $\widehat{M'MA}$

= $\frac{1}{2}$mes $\widehat{M'OB}$ - $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{M'OA}$ d'après a) = mes $\widehat{AOB}$.



Propriété1

Deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux.



On mes $\widehat{AMB}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ et mes $\widehat{ANB}$ = $\frac{1}{2}$mes $\widehat{AOB}$ donc mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.

Propriété2

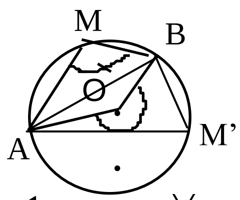
Deux angles inscrits dans le même cercle sont égaux si et seulement si ils interceptent des arcs de même longueur.

Mes $\widehat{AMB}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ et mes $\widehat{A'NB'}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{A'OB'}$ or les arcs AB et A'B' ont même longueur c'est-à-dire que r*mes $\widehat{AOB}$ = r* mes $\widehat{A'OB'}$ avec r rayon du cercle donc on a : mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{A'OB'}$ d'où mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{A'NB'}$.

Réciproquement si mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{A'NB'}$ alors les deux arcs interceptés ont même longueur.

Propriété3

Deux angles inscrits dans le même cercle sous tendus par la même corde et dont les sommets sont situés de part et d'autre de la corde sont supplémentaires.

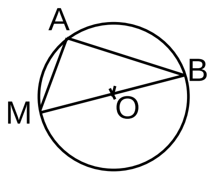


On a : mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}B$ et $AM'B = \frac{1}{2}$ mes $A\check{O}B$ or $A\hat{O}B + A\check{O}B = 2\pi$

d'où mes $\widehat{AMB}$ + mes $\widehat{AM'B} = \pi$

Propriété 4

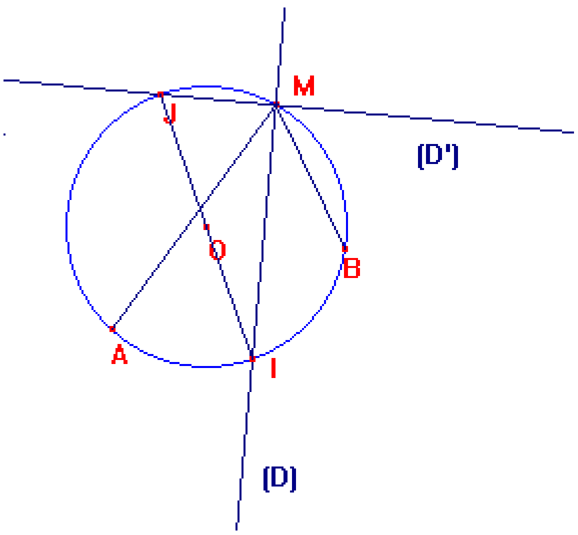
Tout angle inscrit sous tendu par un diamètre est un angle droit.



mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\pi$

Propriété5

La bissectrice intérieure d'un angle inscrit passe par le milieu de l'arc intercepté par cet angle.



Soit (D) une bissectrice intérieure de l'angle inscrit (AMB). (D) rencontre (C) en un point I. les arcs AI et IB ont même longueur d'après la propriété 2 donc I est milieu de l'arc AB.

Propriété6

La bissectrice extérieure d'un angle inscrit passe par le milieu de l'arc ***complémentaire ?*** non intercepté par cet angle.

Soit (D) et (D') les bissectrices de l'angle inscrit (AMB). (D) rencontre (C) en un point I et (D') en J autre que M. (D)$\perp$ (D'), [IJ] est un diamètre et on a :
longueur arc JB = longueur arc JI – longueur arc IB et
longueur arc JA = longueur arc JI – longueur arc IA or longueur arc IB = longueur arc IA
donc on a longueur arc JB = longueur arc JA. Par suite (D') coupe l'arc AB en son milieu.

2. Cercle inscrit – Cercle circonscrit à un triangle

Cercle circonscrit à un triangle : C'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.
Son centre est le point d'intersection des médiatrices des contés du triangle.

Cercle inscrit à un triangle : C'est le cercle tangent intérieurement aux trois cotés du triangle.
Son centre est le point de rencontre des bissectrices intérieures du triangle.

Propriétés : Soit ABC un triangle ; (C) son cercle inscrit de rayon r. on a :
Aire (ABC) = $\frac{1}{2}$(AB + BC + CA) r.

Théorème du sinus : Soit ABC un triangle quelconque et ($\mathcal{C}$) son cercle circonscrit de rayon R. Si AB = c ; AC = b ; BC = a alors on a :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c} = \frac{1}{2R} \text{ et Aire (ABC)} = \frac{abc}{4R}.$$

Démonstration :

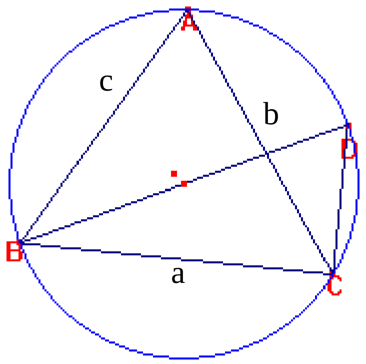


Figure 1

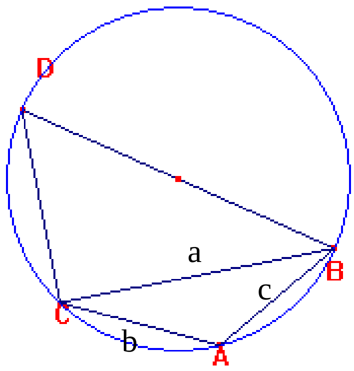


Figure 2

Soit ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit de rayon R.
Soit D le point diamétralement opposé à B.
Dans la figure 1 $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ car ils interceptent le même arc.

Donc sin $\hat{A}$= sin $\hat{D}$= $\frac{BC}{BD}$= $\frac{a}{2R}$ donc $\frac{a}{\sin\hat{A}}$ = 2R.

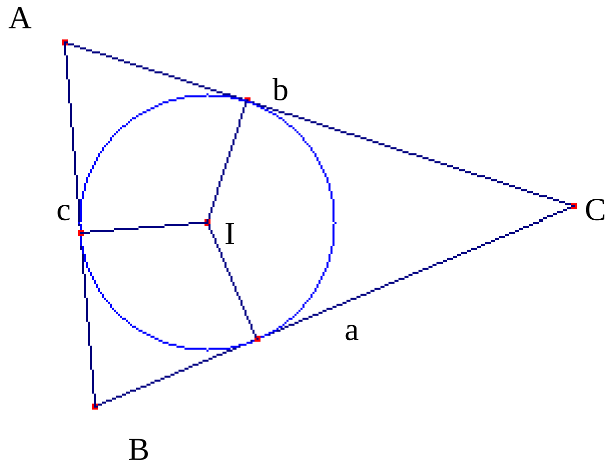
Dans la figure 2, BAC = π - BDC car ils interceptent des arcs complémentaires du cercle.

sin $\hat{A}$=sin (π - BDC) = sin BDC = $\frac{a}{2R}$, donc $\frac{a}{\sin\hat{A}}$ = 2R

On démontre de même que : $\frac{b}{\sin\hat{B}}$ = 2R et $\frac{c}{\sin\hat{C}}$ = 2R

D'où la formule du sinus : $\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R}$

2) Aire du triangle :



$\widehat{AMC}$

Soit (C) le cercle inscrit au triangle de centre I et de rayon r. Nous notons S(ABC) l'aire du triangle ABC

S(ABC) = S(IBC) + S(IBA) + S(IAC) = $\frac{1}{2}$r(a + b +c).

Soit *p* le demi périmètre du triangle ABC on : S (ABC) = *p*R

L'aire du triangle ABC est S = $\frac{1}{2}$ah avec h = b sin$\hat{C}$.

Donc S (ABC) = $\frac{1}{2}$a b sin$\hat{C}$.

Puisque sin $\hat{C}=\frac{c}{2R}$.

On a : S(ABC) = $\frac{abc}{4R}$

Cercles ex-inscrits à un triangle relativement à un coté : c'est un cercle tangent extérieurement aux trois cotés du triangle. Son centre est le point de rencontre d'une bissectrice intérieure et d'une bissectrice extérieure (ou de deux bissectrices extérieures).

Un triangle admet trois cercles ex-inscrits.

Propriété : Les bissectrices extérieures de deux angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes.

Propriété :
L'orthocentre du triangle formé par les centres des cercles ex-inscrits au triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Polygone inscriptible dans un cercle :
Définition : on dit qu'un polygone est inscriptible dans un cercle si et si seulement si tous ses sommets sont sur le cercle.

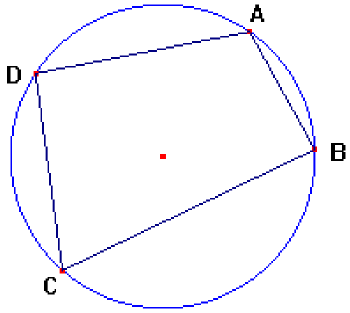
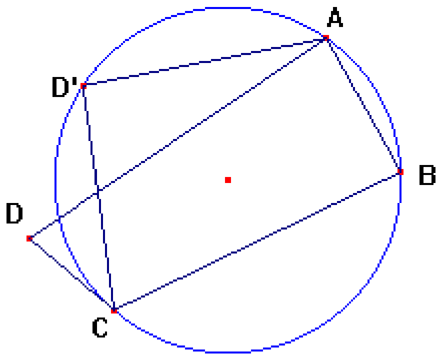
QUADRILATERE INSCRIPTIBLES

Objectif : Etablir qu'un quadrilatère convexe inscriptible est équivalent à un quadrilatère convexe ayant ses angles opposés supplémentaires

Notation :

$\widehat{ABC}$ *représentera la mesure de l'angle* $\widehat{ABC}$

$\overset{\frown}{AC}$ *correspond à la mesure angulaire de l'arc* $\overset{\frown}{AC}$ *(* $\overset{\frown}{AC} = \frac{l}{R}$ *,l est la longueur de l'arc,R rayon du cercle)*

 	1- Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$ donc $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\smile}{AC}) = \frac{1}{2}(2\pi)$ Par suite $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ On montre de même que $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \pi$ Dans un quadrilatère inscriptible les angles opposés sont supplémentaires.
 	2- Réciproquement considérons un quadrilatère convexe ABCD ayant ses angles opposés supplémentaires. Traçons le cercle ($\mathcal{C}$) passant par ABC. Par hypothèse $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{ABC}$. Soit D' le point de (C) situé sur l'arc intercepté par $\widehat{ABC}$ on a d'après (1) : $\widehat{AD'C} = \pi - \widehat{ABC}$. Donc $\widehat{ADC} = \widehat{AD'C}$. On démontre (théorème de l'arc capable) que D et D' sont sur le même arc. D'où ABCD sont sur le même cercle ($\mathcal{C}$).

Théorème : Un quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires

Compléments : Puissance d'un point par rapport à un cercle.
Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R ; M un point n'appartenant pas à ($\mathcal{C}$). Par M on trace deux droites qui coupent respectivement ($\mathcal{C}$) en P et Q et en P' et Q'.

On veut montrer que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP'}.\overrightarrow{MQ'}$.

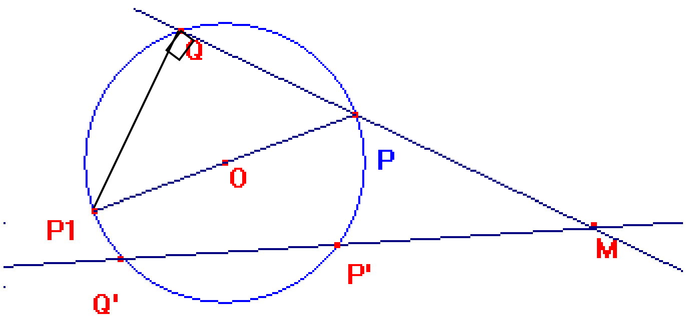
Le nombre $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$, indépendant de la sécante menée par M, est appelé puissance du point M par rapport au cercle ($\mathcal{C}$).

a) Montrer que $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$.

Conseil : Utiliser le point P1 diamétralement opposé à P et remarquer que
$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP_1}$

b) En déduire que $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la sécante à ($\mathcal{C}$) qui passe par M.
c) M est extérieur à ($\mathcal{C}$); T est le point de contact d'une tangente à ($\mathcal{C}$) menée par M. Démontrer que $MT^2=MP.MQ$. (La tangente (MT) est la position limite des sécantes M, P, Q.)

Indications :



a) Soit P1 le point symétrique de P par rapport à O ; le point Q est alors le projeté orthogonal de P1 sur (MP).
On a : $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$
Par suite on a : $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP_1}$

$= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_1})$

$= (\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP_1})+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP_1})$

puisque : $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{P_1O}$ et OP = R
donc $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$.
b) D'après a) on peut affirmer que quel que soit la sécante en P et Q passant par le point M au cercle de centre O et de rayon R, on a : $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$. Ce nombre indépendant de la sécante passant par M au cercle est appelé : puissance du point M par rapport au cercle.

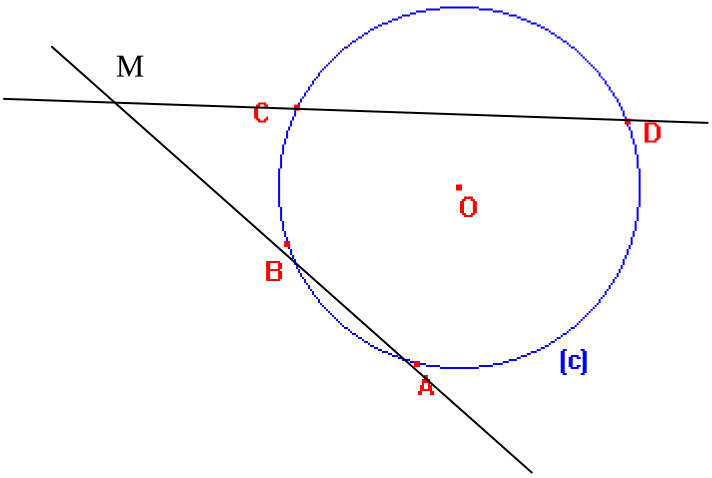
Ce nombre est positif si M est extérieur au cercle ; nul si M est sur le cercle et négatif si M est intérieur au cercle.
Si OM = R alors $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$ est nul
Si OM > R alors $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$ est positif
Si OM < R alors $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$ est négatif

c) Le résultat reste valable lorsqu'on la position limite (MT) tangente au cercle en T avec M extérieur au cercle.

Cocyclicité de 4 points

A, B, C, D sont 4 points d'un cercle (C) tels que (AB) et (CD) sécantes en M. D'après ce qui précède, on peut affirmer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (*)
Réciproquement, on suppose que A, B, C, D sont 4 points distincts tels que (AB) et (CD) sécantes en M et vérifient (*)
Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.

Indication : Considérer le cercle circonscrit au triangle ABC et D' l'autre point d'intersection de ce cercle avec (MC) et montrer que $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$.
En déduire que D = D'.
Indications :



D'après ce qui précède on : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (*)
Réciproquement on suppose A, B, C, D 4 points tels que (AB)$\cap$(CD) = {M}.
Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et D' l'autre point d'intersection de (MC) et (C); on a alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$
Or $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ d'où on a : $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ c'est à dire :
$\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MD'}) = \overrightarrow{O}$. i.e. D = D' car M$\neq C$.
On dit que les 4 points A ;B ;C ;D sont cocycliques.

Propriété : 4 points A, B, C, D sont cocycliques si et si seulement ils vérifient pour tout point du plan la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

RELATIONS ENTRE ANGLE ET ARC

Objectif : Déterminer la relation entre un angle et l'arc qu'il intercepte sur un cercle

Notation préliminaire

$\widehat{ABC}$ *représentera la mesure de l'angle* $\widehat{ABC}$
$\overset{\frown}{AC}$ *correspond à la mesure angulaire de l'arc* $\overset{\frown}{AC}$ *(* $\overset{\frown}{AC} = \dfrac{l}{R}$ *,l est la longueur de l'arc,R rayon du cercle)*

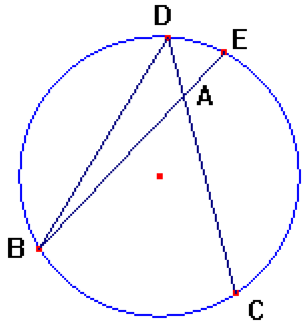
Un cercle (C) étant donné, le sommet A d'un angle interceptant un arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle peut être soit sur le cercle, soit à l'intérieur du cercle, soit à l'extérieur du cercle.

1- Si A est sur le cercle

l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit et on a :

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

2- Si A un point intérieur au cercle différent du centre.



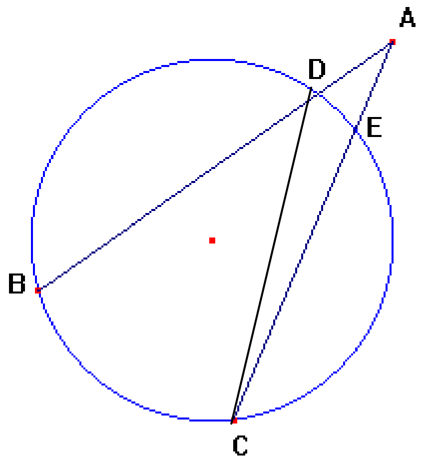
$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} + \widehat{DBE}$

Or $\widehat{DBE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ et $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, donc

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$

D'où $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE})$

3- Si A est un point extérieur au cercle



$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} - \widehat{DCE}$

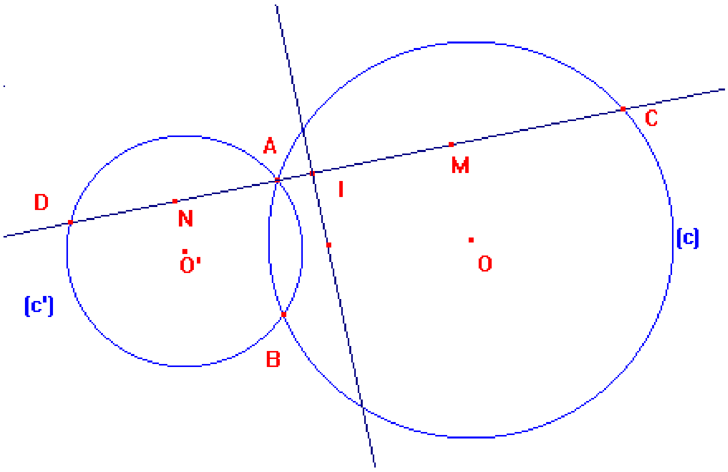
Or $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ et $\widehat{DCE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$, donc

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$

D'où $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE})$

Exercice : Deux cercles $\mathcal{C}$ (O ; R) et $\mathcal{C}$' (O' ; R') se coupent en A et B ; par A, on construit une sécante qui coupe les cercles en C et D. soit M le milieu du segment [AC] et N le milieu du segment [AD] et I le milieu du segment [MN].
1°) Montrer que la perpendiculaire en I à (CD) coupe (OO') en son milieu K.
2°) Construire la sécante (CD) telle que A soit le milieu du segment [CD]. Montrer que alors que A est milieu du segment [MN].

Indications :



(OM) $\perp$(MN) et (O'N) $\perp$(MN) donc OO'NM est un trapèze rectangle. I = m (M,N), utiliser Thalès pour obtenir le résultat.
Tracé la droite (AK) puis la perpendiculaire à (AK) passant par A, elle coupe les cercles ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}$') en C et D tel que AC = AD. Alors m [CD] = m [MN].

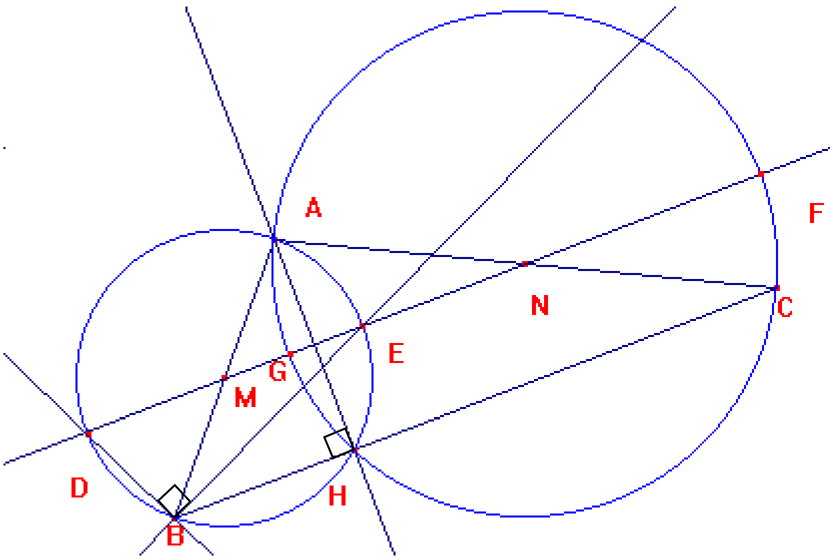
Exercice :

Dans un triangle ABC de hauteur AH, la droite qui joint les milieux M de [AB] et N de [AC] coupe en D et E le cercle de diamètre AB et en F et G le cercle de diamètre AC.

1°) Montrer que les droites (BD) et (BE) sont les bissectrices de l'angle au sommet B tandis que les droites (CF) et (CG) sont les bissectrices de l'angle au sommet C du triangle ABC.

2°) Montrer que les 4 points D, E, F, G sont les pieds des perpendiculaires menées de A aux bissectrices des angles au sommet B et C du triangle ABC.

Indications :



Montrons que : mes (DBE) = π/2. [DE] étant un diamètre du cercle circonscrit au triangle DBE ,donc mes (DBE)= π/2.

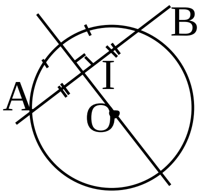
Montrons que mes (ABE) = mes (EBC)
MAH est un triangle isocèle en M ; donc (DE) est une médiatrice du segment [AH] ; d'où longueur de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ = longueur de l'arc $\overset{\frown}{EH}$. L'angle inscrit A^BE intercepte l'arc $\overset{\frown}{AE}$ tandis que l'angle inscrit E^BH intercepte l'arc $\overset{\frown}{EH}$. Long $\overset{\frown}{AE}$ = Long $\overset{\frown}{EH}$ donc mes (ABE) = mes (EBC)
Par suite (BE) est une bissectrice de l'angle A^BC et puisque mes (DBE)= $\pi/2$,alors (DB) est aussi une bissectrice extérieure de l'angle A^BC .
Conclusion : (DB) et (DE) sont les bissectrices de l'angle A^BC.
On démontre de même la seconde propriété.
2) Considérer le triangle ADB rectangle en D puis le triangle ABE rectangle en E. D et E sont alors les pieds des perpendiculaires menées de A aux bissectrices de l'angle au sommet B du triangle ABC.

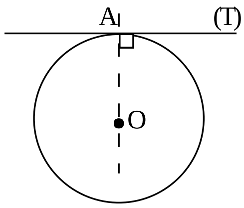
B) Propriétés de la tangente
Propriété 1

Toute droite (D) passant par le centre d'un cercle $(\mathcal{C})$ et perpendiculaire à une corde [AB] de $(\mathcal{C})$ est médiatrice de [AB].

De plus elle partage l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en deux arcs de longueur égale.

Configurations





Construction d'une tangente

a) A appartient au cercle
1. Je trace le cercle $(\mathcal{C})$
2.je marque un point A sur $(\mathcal{C})$
3. Je trace (OA).
4.Je trace la perpendiculaire en A à (OA)

b) A est extérieur à $(\mathcal{C})$
1.je marque un point A hors de $(\mathcal{C})$
2. je trace [OA]
3. je construis le cercle de diamètre [OA]
il coupe $(\mathcal{C})$ en B
4.je trace (AB)

D - EXERCICES

Exercice 4 ***position relative de 2 cercles***

a) Marque 2 points O et O', avec OO' = 6 cm.
b) Construis $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, cercles de centres O et O' (respectivement), de même rayon 2 cm.
c) Construis un cercle $(\mathcal{C}'')$ tangent à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{C}')$; précise le rayon de $(\mathcal{C}'')$.

Exercice 5

a) Marque deux points O et O', avec OO'= 6 cm.
b) Construis les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre respectifs O et O' et de même rayon 2 cm.
c) Construis un cercle $\mathcal{C}''$ tangent à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}''$; précise son rayon.

Exercice 7 *position relative droite / cercle*

Construis un cercle ($\mathcal{C}$) et une droite (D) qui ne coupe pas ($\mathcal{C}$) ; puis les droites parallèles à (D) qui sont tangentes à ($\mathcal{C}$).

Exercice 10

On donne un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O de rayon 4 cm, et un point A à l'extérieur de ce cercle.
Soit O' le milieu de [OA] .
a) Montre que le cercle ($\mathcal{C}'$) de diamètre [OA] coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts M et N.
b) Montre que (AM) et (AN) sont tangentes au cercle ($\mathcal{C}$).

Que représente alors (OA) pour l'angle MAN?

III. APPROFONDISSEMENT

Exercice 14

Trace un cercle (C) de centre O et marque un point I à l'intérieur de (C).
Comment choisir deux points M et N diamétralement opposés, de façon que l'aire du triangle IMN soit la plus grande possible ?

Exercice 16

On considère deux droites (D) et (D') sécantes en O.
a) Construis deux cercles tangents à (D) et à (D')
b) Écris un programme de construction
c) Quelle conjecture peux-tu émettre sur l'emplacement des centres des cercles tangents à ces deux droites.

Exercice 17

On considère deux droites parallèles (D) et (D') .
a) Construis deux cercles tangents à (D) et à (D')
b) Écris un programme de construction
c) Quelle conjecture peux-tu émettre sur l'emplacement des centres des cercles tangents à ces deux droites.

Exercice : Dans un triangle AOB isocèle en O les cercles de diamètre OA et OB coupent respectivement (OB) en C et (OA) en D. ils coupent d'autre part une droite passant par O en E et F.
1°) Comparer les angles EÔA et DÔF ; puis les arcs DF et EA dans les deux cercles.
2°) Montrer que : AE = DF et de même que : BF = CE et BD = AC.
3°) Démontrer que les triangles ACE et DBF sont superposables.

Exercice : 1°) Deux cercles C et C' sont sécants en A et B. on mène par A une sécante quelconque qui coupe les cercles en M et M'.

a) Prouver que l'angle (MBM') est constant.

b) Prouver que les tangentes respectives en M et M’ aux deux cercles se coupent sous un angle constant.

2°) Par le point de contact I des 2 cercles tangents, on mène une sécante qui les coupe en P et Q. Démontrer que les tangentes en P et Q aux 2 cercles sont parallèles.

3°) Par le point de contact J de 2 cercles tangents, on mène 2 sécantes et on joint leurs extrémités. Démontrer que les droites ainsi obtenues sont parallèles.

Exercice 1 : La droite d’Euler[1]

On considère un triangle quelconque ABC. On appelle respectivement H, O et G l’orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité de ce triangle.

1-Démontrer que l’orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit à ce triangle sont alignés.

La droite portant ces trois points est appelée droite d’Euler.

2- Démontrer que le symétrique de l’orthocentre par rapport au milieu d’un des cotés du triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

3- Démontrer que le symétrique de l’orthocentre par rapport à un coté du triangle appartient au cercle circonscrit.

Indications :

1- On pourra utiliser l’homothétie de centre G qui transforme ABC en A’B’C’ où A’, B’, C’ sont les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et le fait que le centre du cercle circonscrit à ABC est l’orthocentre de A’B’C’.

1’- On peut aussi utiliser les barycentres en établissant les relations :

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

2- Montrer que le symétrique de l’orthocentre par rapport au milieu de [AC] est égal au symétrique de B par rapport à O,

Exercice 2 : Le cercle d’Euler[2]

1- On considère un triangle quelconque ABC. On appelle respectivement H, O et G l’orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité de ce triangle.

Démontrer que les milieux des trois cotés, les pieds des trois hauteurs et les milieux des segments compris entre les trois sommets et l’orthocentre sont situés sur le même cercle $(\mathcal{C})$.

2-Démontrer que le rayon de cercle $(\mathcal{C})$ est R/2 où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Le cercle passant par ces neuf points est appelé cercle d’Euler.

3- Démontrer que Ω, le centre du cercle d’Euler, est à égale distance de l’orthocentre et du centre du cercle circonscrit (Ω est le milieu de [OH]).

Indications

[1] Léonard Euler est né à Bâle en 1707 et mourut en 1783. Il fut admis à l’Académie de Saint Péterbourg en 1727 et occupa la Chaire de mathématiques de l’Académie de Prusse. Il a enrichi beaucoup de domaines des mathématiques avec plus de 700 mémoires (473 publiés de son vivant et 261 après sa mort)

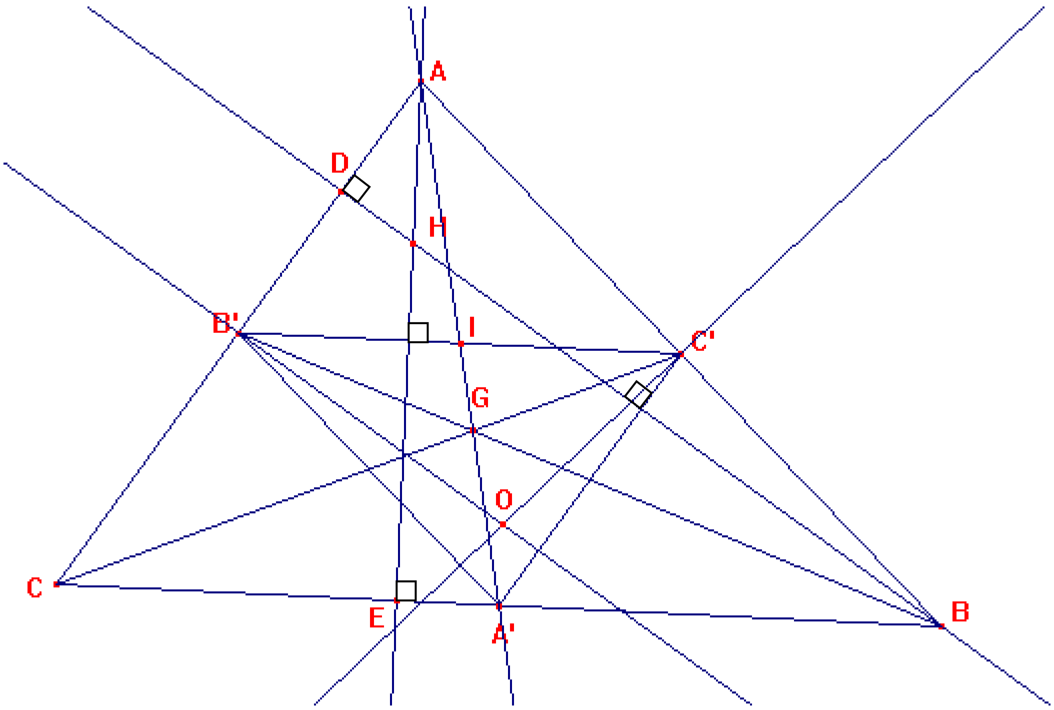
[2] Léonard Euler est né à Bâle en 1707 et mourut en 1783. Il fut admis à l’Académie de Saint Péterbourg en 1727 et occupa la Chaire de mathématiques de l’Académie de Prusse. Il a enrichi beaucoup de domaines des mathématiques avec plus de 700 mémoires (473 publiés de son vivant et 261 après sa mort)

1-En appelant K, L, M, A’, B’, C’ les milieux respectifs des segments [AH], [BH], [CH], [BC], [AC] et [AB] on montre que les quadrilatères du type B’C’LM sont des rectangles et que les autres points sont sur le cercle circonscrit à ce rectangle.
2- Les points A’, B’, C’ et L, M, P étant respectivement diamétralement opposés, trouver une transformation qui transforme l’un des triangles en l’autre.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1 : La droite d’Euler[3]

<u>Première solution</u>



Preuve
G étant le centre de gravité du triangle ABC on a :
$\overrightarrow{GA'} = -1/2\,\overrightarrow{GA}$;
$\overrightarrow{GB'} = -1/2\,\overrightarrow{GB}$;
$\overrightarrow{GC'} = -1/2\,\overrightarrow{GC}$
Donc dans l’homothétie de centre G et de rapport – 1/2, le triangle ABC est transformé en A’B’C’, d’où leurs cotés homologues sont parallèles :(B’C’)//(BC) et (A’C’)//(AC). Par suite CA’C’B’ est un parallélogramme et ses diagonales [B’A’] et [CC’] se coupent en leur milieu.

On en déduit que la médiane [CC’] du triangle ABC est aussi médiane du triangle A’B’C’.

En procédant de même pour les parallélogrammes BA’B’C’ et AB’A’C’, on montre que ABC et A’B’C’ ont le même centre de gravité G.

[3] Léonard Euler est né à Bâle en 1707 et mourut en 1783. Il fut admis à l’Académie de Saint Péterbourg en 1727 et occupa la Chaire de mathématiques de l’Académie de Prusse. Il a enrichi beaucoup de domaines des mathématiques avec plus de 700 mémoires (473 publiés de son vivant et 261 après sa mort)

De plus, on remarque que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC correspond à l'orthocentre du triangle A'B'C'. Ces deux triangles étant homothétiques par l'homothétie h(G ;-1/2) on en déduit :

$\overrightarrow{A'O} = -1/2\,\overrightarrow{AH}$

Or $\overrightarrow{A'G} = -1/2\,\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{OG} = -1/2\,\overrightarrow{HG}$

Par suite O, G et H sont alignés.
La droite contenant les points O, G, H est appelée droite d'Euler

Deuxième solution

Cherchons l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

On a $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

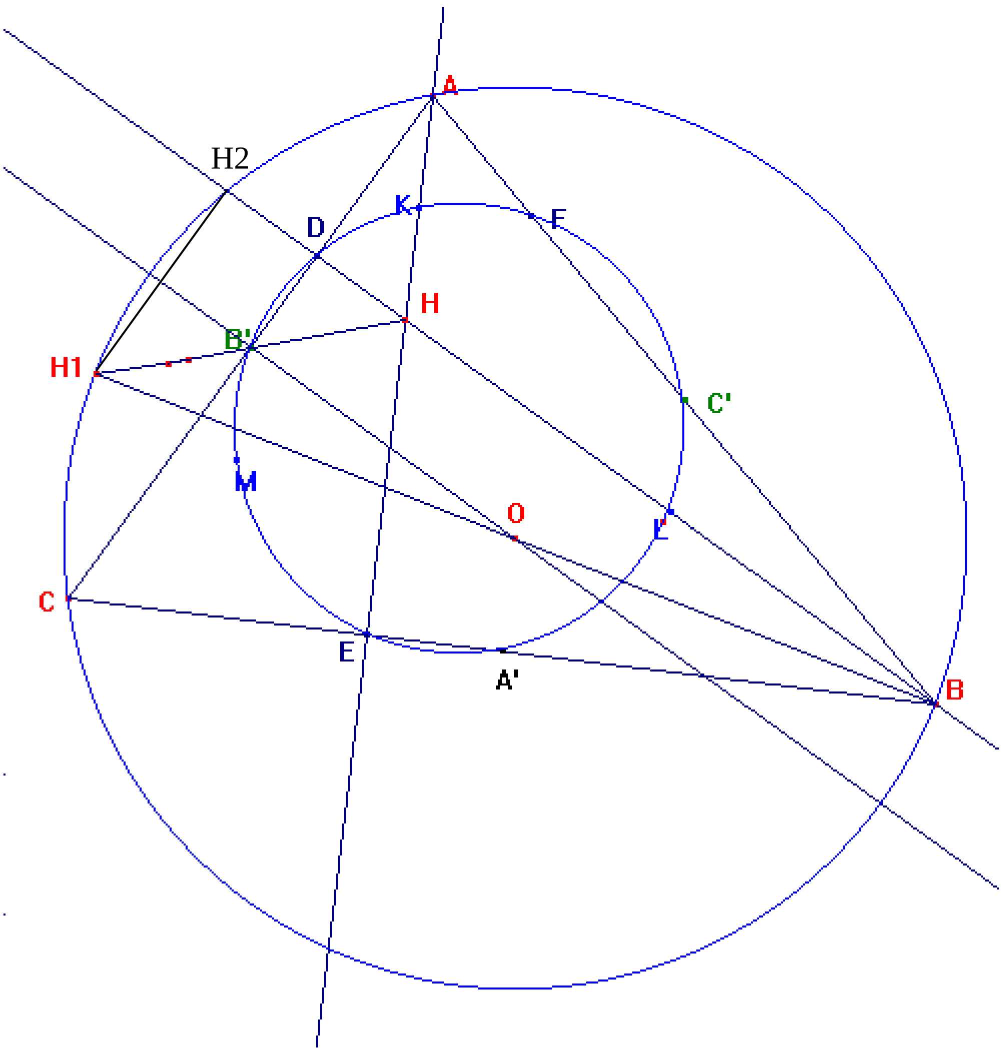
Donc $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{OA'}$ d'après le théorème de la médiane.

$\overrightarrow{OA'}$ étant orthogonal à (BC) on voit que M est sur la hauteur issue de A.
On montre de même que M est sur la hauteur issue de B.
Donc M est confondu avec l'orthocentre H du triangle ABC

d'où $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (1)

G étant le centre de gravité des points A, B et C, on a $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (2)

Des relation (1) et (2) on tire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ ce qui implique l'alignement des trois points O, H et G.



2- Soit H1 le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Dans le triangle BHH1 on a (BH) $\perp$(AC) et (B'O) $\perp$ (AC) respectivement comme hauteur issue de B et médiatrice de [AC]
Donc (B'O) // (HB) et puisque O est le milieu de [BH1] alors B' est le milieu de [HH1].
D'où H1 est le symétrique de H par rapport à B' et H1 se situe sur le cercle circonscrit.
On démontre de même que les symétriques de H par rapport à C' et A' sont sur le cercle circonscrit.
3- Appelons H2 le point d'intersection de (BH) et du cercle circonscrit. [BH1] étant un diamètre on a (BH2) $\perp$ (H1H2). On a aussi (B'D) $\perp$ (BH2).
Donc (H1H2) //(B'D) par suite D est le milieu de [HH2]. Nous avons donc [AC] est perpendiculaire à [HH2] en son milieu D d'où la conclusion demandée. On démontre de même que le symétrique de H par rapport aux autres cotés appartiennent au cecle circonscrit.

Exercice 2 : Le cercle d'Euler [4]

1- B', C' M, L sont les milieux respectifs de [AC], [AB], [HC], [HB].

Le triangle ABC et HBC ont en commun le coté [BC] donc B'C' = MN = 1/2BC. De plus les droites (B'C') et (MN) sont parallèles (car elles sont parallèles à (BC).
De même (B'M)//(AH) et (C'M)//(AH) donc B'C'LM est un parallélogramme.
Mais puisque (AH) $\perp$ (BC) on a (B'M) $\perp$ (B'C') d'où B'C'LM est un rectangle.

De manière analogue on montre que B'A'LK est un rectangle.

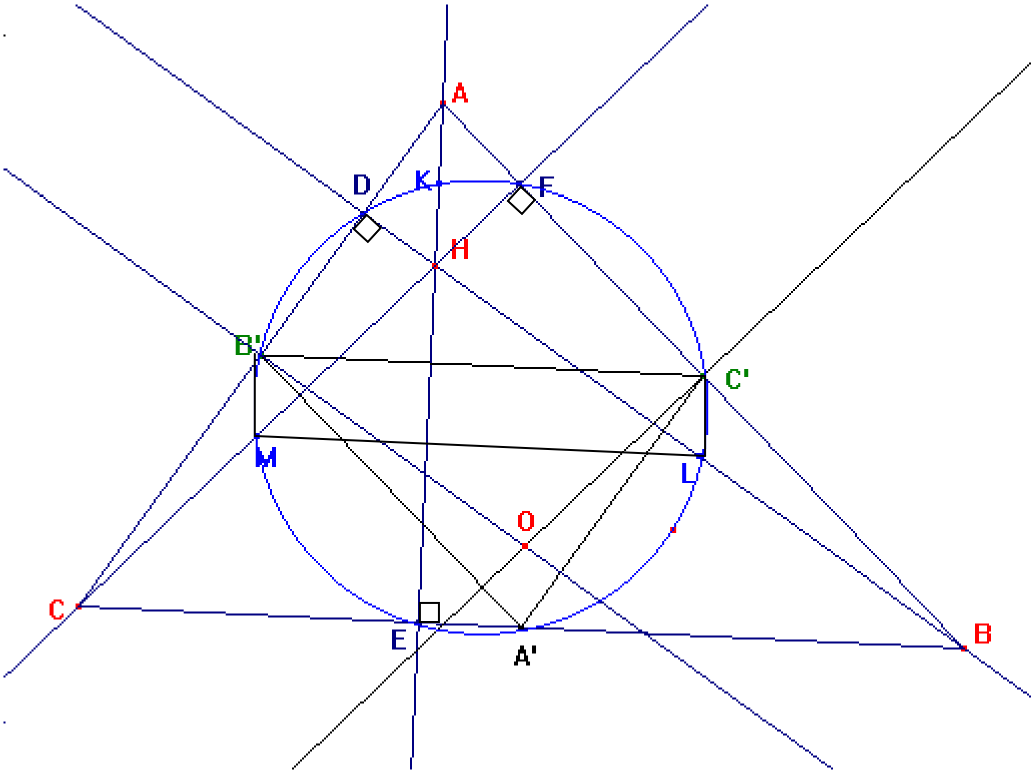
Ces deux rectangles ayant une diagonale commune [B'L], leurs sommets A', B', C', L, K et M sont inscrits sur un même cercle $\mathcal{C}$ de diamètre B'L.

D'autre part, le triangle LDB' est rectangle en D et admet comme diamètre BL, donc le point D appartient à $\mathcal{C}$. On démontre de même que les points F et E appartiennent à $\mathcal{C}$.

2- Les deux triangles A'B'C' et ABC étant homothétiques par l'homothétie h(G ;-1/2), le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle A'B'C', a un rayon égale à R/2, (R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC)

3- Dans le cercle $\mathcal{C}$ les points B' et L, C' et M, A' et K sont diamétralement opposés. Soit Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$. La symétrie centrale S_{Ω} transforme le triangle A'B'C' en KLM donc transforme leurs orthocentres respectifs O et H l'un en l'autre.
Donc Ω est le milieu de [OH]

[4] Léonard Euler est né à Bâle en 1707 et mourut en 1783. Il fut admis à l'Académie de Saint Péterbourg en 1727 et occupa la Chaire de mathématiques de l'Académie de Prusse. Il a enrichi beaucoup de domaines des mathématiques avec plus de 700 mémoires (473 publiés de son vivant et 261 après sa mort)


A
D
K
F
H
B'
C'
M
L
O
C
E
A'
B